

**UNIVERZITA KONŠTANTÍNA FILOZOFA
PEDAGOGICKÁ FAKULTA**

VYSOKOŠKOLSKÉ UČEBNÉ TEXTY

DANKA LUKÁČOVÁ

KAPITOLY Z MATEMATIKY

Druhé rozšírené vydanie

2015

Kapitoly z matematiky
Druhé rozšírené vydanie

Autor: doc. PaedDr. Danko Lukáčová, PhD.

Editor: doc. PaedDr. Danko Lukáčová, PhD.

Recenzenti: doc. Ing. Čestmír Serafín, Dr. Ing-Paed.
doc. PaedDr. Gabriel Bánesz, PhD.

Vydavateľ: Pedagogická fakulta UKF v Nitre

Rok vydania: 2015

Rozsah: 87 strán, 3,7 AH

Náklad: 50 ks

Tlač: elektronická učebnica

ISBN 978-80-558-0802-4

EAN 9788055808024

OBSAH

1	Matice	5
2	Determinanty	11
3	Systém lineárnych rovníc	17
3.1	Systém dvoch lineárnych rovníc s dvoma neznámymi.....	17
3.2	Systém troch lineárnych rovníc s troma neznámymi.....	20
3.3	Systém m lineárnych rovníc s n neznámymi	23
3.4	Cramerovo pravidlo	24
3.5	Eliminačná metóda	25
3.6	Homogénny systém lineárnych rovníc	26
4	Funkcia jednej reálnej premennej.....	32
4.1	Elementárne funkcie	33
4.2	Vlastnosti funkcie	34
4.2.1	Ohraničenosť funkcie	34
4.2.2	Monotónnosť funkcie	35
4.2.3	Párnosť a nepárnosť funkcie.....	36
4.2.4	Periodickosť funkcie.....	38
4.2.5	Spojitosť funkcie	38
4.3	Limita funkcie.....	39
4.4	Použitie výpočtov pomocou limity	42
5	Derivácia funkcie.....	49
5.1	L'Hospitalovo pravidlo	51
5.2	Geometrický význam derivácie	52
5.3	Fyzikálny význam derivácie	53
5.4	Derivácie vyšších rádov	53
6	Priebeh funkcie	57
6.1	Monotónnosť a lokálne extrémny	57
6.2	Maximum a minimum funkcie	58
6.3	Konvexnosť, konkávnosť, inflexné body	60
6.4	Inflexný bod funkcie	62
6.5	Asymptoty.....	64
6.6	Priebeh funkcie	66
7	Integrál funkcie.....	71
7.1	Neurčitý integrál	71
7.1.1	Substitučná metóda.....	73
7.1.2	Metóda per partes	75
7.2	Určitý integrál	78
	Zoznam bibliografických odkazov	85

ÚVOD

Na Pedagogickej fakulte Univerzity Konštantína Filozofa v Nitre sa od septembra 2013 realizoval projekt ESF s názvom Inovácia študijných programov na Pedagogickej fakulte UKF v Nitre za účelom skvalitnenia vzdelávacieho procesu. Strategickým cieľom projektu bolo zabezpečiť inováciu študijných programov s cieľom lepšej prípravy absolventov v súlade s požiadavkami trhu práce a vedomostnej spoločnosti. Súčasťou inovácie týchto programov je analýza potrieb trhu práce, na základe ktorej vzniká návrh na inováciu študijných predmetov tak, aby zodpovedali praxi a potrebám trhu práce. Predkladané učebné texty sú jedným z výstupov riešenia tohto projektu.

Autorka upravila pre študentov učebné texty podľa profilu absolventov študijných programov vyučovaných na Katedre techniky a informačných technológií, ktoré majú svojím obsahom pomôcť študentom získať matematický základ pre štúdium predmetov technického zamerania. Obsah je venovaný najmä riešeniu sústav lineárnych rovníc rôznymi metódami, diferenciálnemu a integrálnemu počtu. Učebný text sa zameriava prednostne na pochopenie a uplatnenie matematických vzťahov v riešených príkladoch. Preto aj teoretická časť príslušnej kapitoly tvorí vždy len menšiu časť a väčší priestor je venovaný riešeniu príkladov. Príklady, ktorými je študijný text doplnený, obsahujú riešenú aj neriešenú zložku. Riešené príklady sú uvedené s metodicky správnym spôsobom ich riešenia, aby študenti mali možnosť overiť si správnosť svojho postupu, resp. aby mali návod na ich riešenie. Za každou kapitolou je uvedený aj súbor neriešených úloh určených na precvičenie. K týmto úlohám sú prezentované výsledky riešení v závere kapitol, resp. podkapitol.

Autorka praje študentom optimistický štart do štúdia matematiky a vyslovuje poďakovanie recenzentom doc. Ing. Čestmírovi Serafínovi, Dr. Ing-Paed. a doc. PaedDr. Gabrielovi Báneszovi, PhD. za objektívne posúdenie práce a ich prínos k skvalitneniu textu.

1 MATICE

Matice sú matematické štruktúry charakteristické presným systémom usporiadanie jednotlivých prvkov. Väčšinou ich používame na riešenie systému rovníc.

Maticou nazývame obdĺžnikovú tabuľku čísel

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \dots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \dots, & a_{2n} \\ \dots, & \dots, & \dots, & \dots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \dots, & a_{mn} \end{pmatrix}$$

A označujeme $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m,n}$. Takúto maticu nazývame maticou typu $m \times n$. Ak $m = n$, hovoríme o štvorcovej matici n -tého stupňa. Čísla, z ktorých pozostáva matica, nazývame jej prvkami. Vodorovné rady prvkov nazývame riadkami, zvislé stĺpcami matice. Prvky štvorcovej matice, ktoré ležia na úsečke spájajúcej prvok a_{11} s prvkom a_{nn} , nazývame hlavnou uhlopriečkou matice. Podobne vedľajšou uhlopriečkou matice nazývame prvky, ktoré ležia na úsečke spájajúcej prvky a_{1n} a a_{n1} .

Maticu typu $m \times n$, ktorej všetky prvky sa rovnajú nule, nazývame nulovou maticou typu $m \times n$.

Jednotkovou maticou n -tého stupňa nazývame štvorcovú maticu

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1, & 0, & \dots & 0 \\ 0, & 1, & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Submaticou matice $\mathbf{A}$ nazývame štvorcovú maticu, ktorá vznikne z matice $\mathbf{A}$ vynechaním niekoľkých riadkov a stĺpcov (prípadne žiadnych).

Pre matice zavádzame tri základné operácie: súčet dvoch matíc, súčin dvoch matíc, súčin matice a čísla.

Súčet matíc

Súčtom dvoch matíc rovnakého typu $m \times n$ $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m,n}$, $\mathbf{B} = (b_{ij})_{m,n}$ nazývame maticu toho istého typu

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (a_{ij} + b_{ij})_{m,n}$$

Súčin matice a čísla

Súčinom matice $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m,n}$ a čísla α nazývame maticu $\alpha\mathbf{A} = (\alpha a_{ij})_{m,n}$.

Súčin matíc

Súčinom dvoch matíc $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m,n}$, $\mathbf{B} = (b_{jk})_{n,p}$ v danom poradí, pričom počet stĺpcov prvej matice sa rovná počtu riadkov druhej matice, nazývame maticu $\mathbf{C} = (c_{ik})_{m,p} =$

$$\left(\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} \right)_{m,p} \text{ a označujeme } \mathbf{C} = \mathbf{AB}.$$

Pre tieto operácie platí:

1. $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$
2. $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$
3. Rovnica $\mathbf{B} + \mathbf{X} = \mathbf{A}$ má jediné riešenie, ktoré označujeme $\mathbf{X} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$.
4. Pre ľubovoľné matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ typov $m \times n$, $n \times m$ nemusí platiť $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, t.j. pre násobenie matíc neplatí komutatívny zákon.
5. Pre matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ typov $m \times n$, $n \times p$, $p \times q$ platí $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$
6. Pre matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ typov $m \times n$, $m \times n$, $n \times p$ platí $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$ a pre matice typov $m \times n$, $m \times n$, $p \times m$ platí $\mathbf{C}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{CA} + \mathbf{CB}$
7. Platí: $\alpha(\beta\mathbf{A}) = (\alpha\beta)\mathbf{A}$
8. Pre matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ typov $m \times n$, $n \times m$ platí $\alpha(\mathbf{AB}) = (\alpha\mathbf{A})\mathbf{B}$, kde α , β sú čísla.
9. Pre štvorcové matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ platí $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|$.
10. Pre ľubovoľnú štvorcovú maticu $\mathbf{A}$ platí $\mathbf{AE} = \mathbf{EA} = \mathbf{A}$, kde $\mathbf{E}$ je jednotková matica toho istého stupňa.

Pre každú maticu $\mathbf{A}$ existujú dve čísla $h_r(\mathbf{A})$, $h_s(\mathbf{A})$, udávajúce hodnotu riadkov, resp. hodnotu stĺpcov matice ako hodnotu sústavy n -tíc.

Pre každú maticu $\mathbf{A}$ platí: $h_r(\mathbf{A}) = h_s(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A})$. Číslo $h(\mathbf{A})$ nazývame hodnotou matice $\mathbf{A}$.

Hodnotu matice vypočítame, ak maticu $\mathbf{A}$ prevedieme na „trojuholníkový tvar“ úpravami, ktoré nemenia jej hodnotu. Hodnotu matice nemenia tieto úpravy:

1. vzájomná výmena dvoch ľubovoľných riadkov matice,
2. vynásobenie ľubovoľného riadku matice číslom $c \neq 0$,
3. pripočítanie lineárnej kombinácie iných riadkov matice $\mathbf{A}$ k danému riadku matice $\mathbf{A}$,
4. pridanie alebo vynechanie riadku matice $\mathbf{A}$, ktorý je lineárnou kombináciou jej iných riadkov,
5. vynechanie riadku, ktorý obsahuje samé nuly,
6. vzájomná výmena riadkov matice $\mathbf{A}$ za jej stĺpce.

Výpočet hodnoty matice si ukážeme na príklade.

Príklad 1.

Nájdite hodnotu matice $\mathbf{A}$ metódou úprav na „trojuholníkový tvar“.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

Riešenie:

Násobíme štvrtý stĺpec matice $\mathbf{A}$ číslom -2 a pripočítajme výsledok k prvému stĺpcu. Potom štvrtý stĺpec vynásobíme číslom $-\frac{3}{2}$ a pripočítame k druhému stĺpcu.

$$h(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{pmatrix} = h \begin{pmatrix} 0 & 0 & -5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -7 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -8 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -6 \end{pmatrix} = h \begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 \\ -7 & 4 & 2 \\ -8 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & -5 \\ -1 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

Poslednú maticu sme získali vynechaním nulových stĺpcov. Ďalej vynásobíme druhý stĺpec matice číslom $\frac{1}{2}$ a vymeníme ho s prvým stĺpcom. Dostávame:

$$h(\mathbf{A}) = h \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 2 & -7 & 2 \\ 1 & -8 & 2 \\ 1 & 1 & -5 \\ 2 & -1 & -6 \end{pmatrix} = h \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 6 & -8 \\ 0 & 9 & -12 \end{pmatrix} = h \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = h \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} = 2$$

Prvý riadok vynásobíme číslom -2 a pripočítame ho k druhému riadku a piatemu riadku, prvý riadok vynásobíme číslom -1 a pripočítame ho k tretiemu riadku a aj k štvrtému riadku. Prvý riadok ponecháme bez zmeny a nulové riadky vynecháme. Hodnota matice je 2.

Ďalšie operácie s maticami si môžete precvičiť na príkladoch, ktorých správne riešenia môžete nájsť na konci kapitoly.

Príklady:

1. Nájdite súčet matic:

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 7 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Vynásobte matice:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{5}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Vynásobte matice:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b)} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (1, 2, 1)$$

$$\text{c)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

4. Nájdite hodnotu matíc:

$$\text{a)} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 6 & 9 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{b)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\text{c)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\text{d)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{e)} \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & -6 & -9 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\text{f)} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{g)} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Výsledky:

1.

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 12 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 8 & 2 & 0 \\ 9 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2.

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 7 & -7 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{d) } \begin{pmatrix} 21 & 21 & 21 \\ 16 & 16 & 16 \\ 31 & 31 & 31 \end{pmatrix}$$

3.

$$\text{a) } (8) \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 7 & 15 \\ 7 & 20 \end{pmatrix}$$

4.

a) 1 b) 1 c) 2 d) 3 e) 2 f) 2 g) 3

2 DETERMINANTY

Determinanty sú svojim formálnym zápisom podobné maticiam, ale úplne inak sa s nimi počíta. Používame ich však tiež na riešenie systému rovníc.

Determinantom matice $\mathbf{A}$ pre $n \geq 1$ (determinantom n -tého stupňa) nazývame číslo $|\mathbf{A}|$, ktoré z prvkov danej matice vznikne takto:

$$|\mathbf{A}| = |a_{ij}|_1^n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^k a_{1k_1} a_{2k_2} \dots a_{nk_n}$$

kde konečný súčet berieme cez všetky permutácie $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ čísel $1, 2, \dots, n$ a k je počet inverzií uvažovanej permutácie. (Dvojice čísel k_i, k_j ($i < j$) tvoria inverziu v permutácii $(k_1, k_2, \dots, k_n)$, ak platí $k_i > k_j$.)

Prvky, riadky a stĺpce matice $\mathbf{A}$ nazývame aj prvkami, riadkami a stĺpcami determinantu $|\mathbf{A}|$.

Subdeterminantom $\mathbf{M}_{ij}$ k prvku a_{ij} matice $\mathbf{A}$ stupňa $n \geq 2$ nazývame determinant matice stupňa $(n-1)$, ktorú dostaneme vynechaním i -tého riadku a j -tého stĺpca matice $\mathbf{A}$.

Algebraickým doplnkom k prvku a_{ij} matice $\mathbf{A}$ nazývame súčin $\mathbf{A}_{ij} = (-1)^{i+j} \mathbf{M}_{ij}$.

Pre determinant prvého stupňa platí:

$$|\mathbf{A}| = |a_{11}| = a_{11}$$

Pre determinant druhého stupňa platí:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Determinant druhého stupňa vypočítame podľa schémy uvedenej nižšie, pričom prvky podľa uhlopriečok násobíme:

$$\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array} \begin{array}{l} \diagdown \\ \diagup \end{array} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

- +

Pre determinant tretieho stupňa platí:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Determinant tretieho stupňa vypočítame podľa schémy uvedenej nižšie takto:

$$\begin{array}{ccccccc} & + & + & + & & & \\ \begin{array}{c} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{array} & \begin{array}{c} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{array} & \begin{array}{c} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{array} & \begin{array}{c} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{array} & \begin{array}{c} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{array} & \begin{array}{c} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{array} & \\ & - & - & - & & & \end{array} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Tento spôsob výpočtu determinantu sa nazýva Sarusovo pravidlo.

Determinanty majú tieto vlastnosti:

1. Determinant sa rovná súčtu súčinov prvkov ľubovoľného riadku (alebo stĺpca) a k nim príslušných algebraických doplnkov:

$$|\mathbf{A}| = \sum_{j=1}^n a_{ij}A_{ij} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} \quad , \text{ resp.}$$

$$|\mathbf{A}| = \sum_{i=1}^n a_{ij}A_{ij} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}$$

Uvedený súčet nazývame rozvoj determinantu $|\mathbf{A}|$ podľa prvkov i-teho riadku, resp. podľa j-teho stĺpca matice $\mathbf{A}$.

2. Ak sa všetky prvky ľubovoľného riadku (stĺpca) matice $\mathbf{A}$ rovnajú nule, determinant tejto matice sa rovná nule.
3. Ak v matici $\mathbf{A}$ navzájom vymeníme dva riadky (alebo stĺpce), determinant $|\mathbf{A}|$ zmení znamienko.
4. Ak dva riadky (stĺpce) matice $\mathbf{A}$ sú rovnaké, determinant $|\mathbf{A}|$ sa rovná nule.
5. Ak v matici $\mathbf{A}$ vynásobíme všetky prvky daného riadku (stĺpca) tým istým číslom c , determinant tejto matice sa rovná súčinu čísla c a determinantu pôvodnej matice. To znamená, že spoločný činiteľ všetkých prvkov jedného riadku (stĺpca) môžeme vyňať pred determinant.
6. Ak všetky prvky jedného riadku (stĺpca) matice $\mathbf{A}$ sú úmerné zodpovedajúcim prvkom iného riadku (stĺpca) matice $\mathbf{A}$, determinant $|\mathbf{A}|$ sa rovná nule.
7. Ak všetky prvky i-teho riadku sú súčty k sčítancov, determinant sa rovná súčtu k determinantov, ktoré majú s pôvodným determinantom všetky riadky okrem i-teho rovnaké a v i-tom riadku obsahuje prvý determinant prvé sčítance, druhý determinant druhé sčítance, ..., k -ty determinant k -te sčítance z i-teho riadku pôvodného determinantu. Pravidlo platí aj pre stĺpce determinantu.
8. Ak k ľubovoľnému riadku matice pripočítame lineárnu kombináciu iných riadkov matice, determinant novej matice sa rovná determinantu pôvodnej matice. Pravidlo platí aj pre stĺpce determinantu.

9. Ak sú riadky alebo stĺpce matice **A** lineárne závislé, jej determinant sa rovná nule.

Všetky vlastnosti determinantov používame pri výpočte determinantov. Ako to robíme, si ukážeme na riešených príkladoch.

Príklad 1:

Vypočítajte determinant:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & -2 & 0 \\ 6 & 8 & -14 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Riešenie:

Z tretieho riadka vyjmeme pred determinant číslo 2:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & -2 & 0 \\ 6 & 8 & -14 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & -7 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Posledný riadok vynásobíme číslom -1 a pripočítame k tretiemu riadku. Dostaneme:

$$D = 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & -7 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot (-1)^{4+4} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 5 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & -12 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 5 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -12 \end{vmatrix}$$

$$D = 2 \cdot (-12) \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -24(0-15) = 360$$

Príklad 2:

Vypočítajte determinant:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Riešenie:

Pripočítame prvý, druhý a tretí stĺpec k tretiemu stĺpcu a z prvého stĺpca vyjmeme pred determinant spoločný činiteľ 6. Dostaneme:

$$D = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Odpočítame prvý riadok od ostatných:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 6 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 48$$

Príklady:

1. Vypočítajte determinanty:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -5 & 8 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -2 & -5 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 1+\sqrt{3} & 3-\sqrt{5} \\ 3+\sqrt{5} & 1-\sqrt{3} \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} a+1 & a \\ a & a-1 \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} a-b & a+b \\ a+b & a-b \end{vmatrix}$

2. Vypočítajte determinanty:

a) $\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} \sin x & -\cos x \\ \sin y & \cos y \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} b & c-di \\ c+di & a \end{vmatrix}$

kde i je imaginárna jednotka.

3. Vypočítajte determinanty tretieho stupňa:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 1 \\ -4 & -5 & -19 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ -1 & 7 & 1 \\ 4 & 1 & -4 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 4 \\ 6 & 4 & 2 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 3 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 5 \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}$

g) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 5 & 25 \end{vmatrix}$

h) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

i) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

4. Vypočítajte determinanty tretieho stupňa:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} & \text{b)} \begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix} & \text{c)} \begin{vmatrix} a & y & y \\ y & b & y \\ y & y & c \end{vmatrix} \\ \text{d)} \begin{vmatrix} \sin x & 1 & \cos x \\ \sin y & 1 & \cos y \\ \sin z & 1 & \cos z \end{vmatrix} & \text{e)} \begin{vmatrix} 1 & \cos x & \cos y \\ \cos x & 1 & \cos z \\ \cos y & \cos z & 1 \end{vmatrix} & \text{f)} \begin{vmatrix} 1+i & 0 & 1 \\ i & 1 & 0 \\ 1 & -i & i-1 \end{vmatrix} \end{array}$$

5. Sčítajte determinanty:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 3 & b & 5 \\ 2 & m & 2 \\ 4 & p & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & a & 5 \\ 2 & n & 2 \\ 4 & q & 1 \end{vmatrix} \quad \text{b)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & -5 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & -5 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

6. Vypočítajte determinanty:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{vmatrix} 12 & 5 & 2 & 7 \\ 25 & 0 & 5 & 5 \\ 26 & 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} & \text{b)} \begin{vmatrix} 33 & 1 & 43 & 3 \\ 10 & 9 & 1 & 5 \\ 35 & 3 & 7 & 7 \\ 6 & 7 & 5 & 3 \end{vmatrix} \\ \text{c)} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} & \text{d)} \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 & 4 \\ 10 & 2 & -2 & 10 \\ -5 & 6 & 8 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\ \text{e)} \begin{vmatrix} -8 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 7 \\ 11 & 3 & 1 & 1 \\ 7 & -7 & 5 & 3 \end{vmatrix} & \text{f)} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \end{array}$$

Výsledky:

1.

a) -13 b) 44 c) -11 d) -6 e) -1 f) -4ab

2.

a) $\cos 2x$ b) $\sin(x + y)$ c) $ab - c^2 - d^2$

3.

a) 0 b) 0 c) -58 d) -144 e) 98 f) 16
g) 6 h) 1 i) 1

4.

a) $(a - b)(b - c)(c - d)$

b) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

c) $2y^3 - (a + b + c)y^2 + abc$

d) $\sin(x - z) + \sin(z - y) + \sin(y - x)$

e) $1 - \cos^2 x - \cos^2 y - \cos^2 z + 2\cos x \cdot \cos y \cdot \cos z$

f) -2

5.

a) $\begin{vmatrix} 3, & a+b, & 5 \\ 2, & m+n, & 2 \\ 4, & p+q, & 1 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 3, & 2, & 1 \\ 7, & 4, & -5 \\ 8, & 1, & 0 \end{vmatrix}$

6.

a) -18 792 000

b) -25 728 000

c) -48

d) -570

e) -1 224

f) 0

3 SYSTÉM LINEÁRNYCH ROVNÍC

Zápisu dvoch rovníc s dvoma neznámymi pod seba obyčajne hovoríme systém lineárnych rovníc alebo sústava lineárnych rovníc.

3.1 Systém dvoch lineárnych rovníc s dvoma neznámymi

Rovnicu tvaru $ax + by = c$, kde $a \neq 0$ alebo $b \neq 0$ nazývame lineárnou rovnicou s dvoma neznámymi x, y .

Dvojicu čísel x_0 a y_0 nazývame riešením uvedenej rovnice, ak platí:

$$ax_0 + by_0 = c$$

Rovnice tvaru

$$ax + by = c, \text{ kde } a \neq 0 \text{ alebo } b \neq 0$$

$$dx + ey = f, \text{ kde } d \neq 0 \text{ alebo } e \neq 0$$

nazývame systémom (sústavou) dvoch lineárnych rovníc s dvoma neznámymi x, y .

Dvojicu čísel x_0 a y_0 nazývame riešením vyššie uvedeného systému rovníc, ak platí:

$$ax_0 + by_0 = c \text{ a zároveň } dx_0 + ey_0 = f$$

Pri riešení systému dvoch rovníc s dvoma neznámymi používame tri metódy:

1. dosadzovaciu (substitučnú) metódu;
2. sčítaciu (adičnú) metódu;
3. porovnávaciu (komparačnú) metódu.

Dosadzovacia (substitučná) metóda:

Dosadzovacia metóda spočíva v tom, že z jednej rovnice si vyjadríme jednu neznámu a výraz, ktorý takto dostaneme, dosadíme do druhej rovnice za neznámu.

Takto dostaneme jednu rovnicu s jednou neznámou, ktorú vyriešime. Následne dosadením vypočítame i druhú neznámu.

Príklad:

Riešte sústavu rovníc

$$2x - 3y = 5$$

$$x - 2y = 1$$

Riešenie:

Z druhej rovnice si vyjadríme napr. neznámu x :

$$x - 2y = 1 \quad / + 2y$$

$$x = 1 + 2y$$

Výraz, ktorý sme získali dosadíme do prvej rovnice za neznámu x :

$$2(1 + 2y) - 3y = 5$$

Získali sme lineárnu rovnicu s jednou neznámou, ktorú vyriešime:

$$2 + 4y - 3y = 5$$

$$2 + y = 5 \quad / - 2$$

$$y = 3$$

Získanú neznámu dosadíme do výrazu, ktorý sme získali z 2. rovnice a vypočítame neznámu x :

$$x = 1 + 2 \cdot 3$$

$$x = 7$$

Riešením danej sústavy je usporiadaná dvojica $[x; y] = [7; 3]$.

Sčítacia (adičná) metóda:

Táto metóda spočíva v tom, že každú rovnicu po úprave na základný tvar napr. $2x + 3y = 4$ násobíme vhodným nenulovým číslom tak, aby po sčítaní oboch rovníc jedna neznáma „vypadla“.

Takto dostaneme rovnicu s jednou neznámou, ktorú vyriešime.

Príklad:

Riešte sústavu rovníc

$$2x - 3y = 5$$

$$x - 2y = 1$$

Riešenie:

Chceme určiť napr. neznámu x , teda potrebujeme, aby „vypadla“ neznáma y . Násobíme teda prvú rovnicu číslom -2 a druhú rovnicu číslom 3 .

$$2x - 3y = 5 \quad / \cdot (-2)$$

$$x - 2y = 1 \quad / \cdot 3$$

dostaneme

$$-4x + 6y = -10$$

$$3x - 6y = 3$$

Teraz obe rovnice sčítame:

$$-4x + 3x + 6y - 6y = 3 - 10$$

$$-x = -7 \quad / \cdot (-1)$$

$$x = 7$$

Druhú neznámu vypočítame dosadením číslo 7 do prvej alebo druhej rovnice, napr.:

$$2 \cdot 7 - 3y = 5$$

$$14 - 3y = 5 \quad / - 14$$

$$-3y = -9 \quad / : (-3)$$

$$y = 3$$

Riešením danej sústavy je usporiadaná dvojica $[x; y] = [7; 3]$.

Porovnávací (komparačný) metóda:

Táto metóda spočíva v tom, že z oboch rovníc si vyjadríme tú istú neznámu, získané výrazy porovnáme a tak dostaneme rovnicu s jednou neznámou, ktorú vyriešime. Následne dosadením vypočítame i druhú neznámu.

Príklad:

Riešte sústavu rovníc

$$2x - 3y = 5$$

$$x - 2y = 1$$

s neznámymi $x, y \in \mathbb{R}$.

Riešenie:

Z prvej rovnice si vyjadríme napr. neznámu x a z druhej rovnice si vyjadríme tiež neznámu x :

$$x - 2y = 1 \quad / + 2y$$

$$x = 1 + 2y$$

Keďže sa rovnajú ľavé strany oboch rovníc, tak sa rovnajú i pravé strany týchto rovníc, takže vytvoríme rovnicu $P_1 = P_2$, ktorú vyriešime:

$$1 + 2y = \frac{5}{2} + \frac{3}{2}y \quad \text{odstránime zlomky}$$

$$2 + 4y = 5 + 3y / - 2 - 3y$$

$$y = 3$$

Získanú hodnotu premennej y dosadíme napr. do upravenej druhej rovnice a vypočítame x :

$$x = 1 + 2 \cdot 3 = 7$$

Riešením danej sústavy je usporiadaná dvojica $[x; y] = [7; 3]$.

3.2 Systém troch lineárnych rovníc s tromi neznámymi

Rovnicu tvaru $ax + by + cz = d$, kde $a \neq 0$ alebo $b \neq 0$ alebo $c \neq 0$ nazývame lineárnou rovnicou s tromi neznámymi x, y, z .

Trojicu čísel x_0, y_0, z_0 nazývame riešením vyššie uvedenej rovnice, ak platí:

$$ax_0 + by_0 + cz_0 = d$$

Rovnice tvaru

$$ax + by + cz = d, \text{ kde } a \neq 0 \text{ alebo } b \neq 0 \text{ alebo } c \neq 0$$

$$ex + fy + gz = h, \text{ kde } e \neq 0 \text{ alebo } f \neq 0 \text{ alebo } g \neq 0$$

$$ix + jy + kz = l, \text{ kde } i \neq 0 \text{ alebo } j \neq 0 \text{ alebo } k \neq 0$$

nazývame systémom (sústavou) troch lineárnych rovníc s tromi neznámymi x, y, z .

Trojicu čísel x_0, y_0, z_0 nazývame riešením vyššie uvedeného systému rovníc, ak platí:

$$ax_0 + by_0 + cz_0 = d, \text{ kde } a \neq 0 \text{ alebo } b \neq 0 \text{ alebo } c \neq 0$$

$$ex_0 + fy_0 + gz_0 = h, \text{ kde } e \neq 0 \text{ alebo } f \neq 0 \text{ alebo } g \neq 0$$

$$ix_0 + jy_0 + kz_0 = l, \text{ kde } i \neq 0 \text{ alebo } j \neq 0 \text{ alebo } k \neq 0$$

Pri riešení systému troch rovníc s tromi neznámymi najčastejšie využívame:

1. Gaussovu eliminačnú metódu;
2. Cramerovo pravidlo;
3. dosadzovacia metódu.

Gaussova eliminačná metóda

Táto metóda spočíva v postupnej úprave systému rovníc na tzv. trojuholníkový tvar, kde v druhej rovnici je eliminovaná prvá neznáma a v tretej rovnici je eliminovaná prvá a druhá neznáma.

Samotný postup riešenia systému rovníc pomocou Gaussovej eliminačnej metódy si ukážeme na príklade, v ďalšej kapitole ho vysvetlíme teoreticky a zovšeobecníme pre ľubovoľný počet rovníc.

Príklad:

Riešte systém rovníc s neznámymi $x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}2x - 3y + 2z &= 2 \\ -x - 4y - 3z &= -18 \\ 3x + 5y - z &= 10\end{aligned}$$

Riešenie:

Kvôli jednoduchšiemu počítaniu sa snažíme mať ako prvú rovnicu tú z troch rovníc, ktorú dokážeme najjednoduchšie upraviť na tvar s koeficientom 1 pred prvou neznámou (prípadne pred inou neznámou a vtedy by sme museli vymeniť poradie neznámych).

V našom prípade si na prvé miesto presunieme 2. rovnicu vynásobenú číslom (-1).

$$\begin{aligned}x + 4y + 3z &= 18 \\ 2x - 3y + 2z &= 2 \\ 3x + 5y - z &= 10\end{aligned}$$

Prvú rovnicu odpoíšeme. (-2)-násobok prvej rovnice pripočítame k druhej rovnici (tým eliminujeme neznámu x v druhej rovnici) a (-3)-násobok prvej rovnice pripočítame k tretej rovnici (tým eliminujeme neznámu x v tretej rovnici).

$$\begin{aligned}x + 4y + 3z &= 18 \\ -11y - 4z &= -34 \\ -7y - 10z &= -44\end{aligned}$$

Prvú rovnicu odpíšeme. Aby sme pred neznámou y dostali v druhej a tretej rovnici navzájom opačné čísla, tak druhú rovnicu násobíme číslom (-7) a tretiu rovnicu číslom 11 .

$$\begin{aligned}x + 4y + 3z &= 18 \\77y + 28z &= 238 \\- 77y - 110z &= -484\end{aligned}$$

1. a 2. rovnicu odpíšeme a 2. rovnicu pripočítame k tretej.

$$\begin{aligned}x + 4y + 3z &= 18 \\77y + 28z &= 238 \\- 82z &= -246 / : (-82) \text{ z toho } z = 3, \text{ čo. dosadíme do druhej rovnice} \\77y + 28 \cdot 3 &= 238 \text{ vyjadríme } y = 2 \text{ a za } z, y \text{ v 1. rovnici dosadíme vypočítané} \\x + 4 \cdot 2 + 3 \cdot 3 &= 18 \Rightarrow x = 1\end{aligned}$$

Skúšku správnosti vykonáme dosadením vypočítaných hodnôt do všetkých troch rovníc.

Riešením danej sústavy rovníc je usporiadaná trojica $[x, y, z] = [1, 2, 3]$.

Cramerovo pravidlo

Táto metóda umožňuje riešiť systém n - rovníc s n - neznámymi. Vhodnou metódou na riešenie systému n - rovníc s n - neznámymi je vtedy, ak počet rovníc (neznámych) je menší ako 4. Pre $n > 3$ je vhodnejšou metódou Gaussova eliminačná metóda.

Príklad:

Riešte danú sústavu rovníc s neznámymi $x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}2x - 3y + 2z &= 2 \\-x - 4y - 3z &= -18 \\3x + 5y - z &= 10\end{aligned}$$

Riešenie:

Danú sústavu si zapíšeme v tvare matíc A, B :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ -1 & -4 & -3 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 2 \\ -18 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Ak determinant matice je nenulový, tak daná sústava má práve jedno riešenie. Vypočítame determinant matice A. Čísla na uhlopriečkach idúcich vpravo násobíme a píšeme so znamienkom +, čísla na uhlopriečkach idúcich vľavo násobíme a píšeme so znamienkom -.

$$A = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ -1 & -4 & -3 \\ 3 & 5 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 & 2 & -3 \\ -1 & -4 & -3 & -1 & -4 \\ 3 & 5 & -1 & 3 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (-4) \cdot (-1) + (-3) \cdot (-3) \cdot 3 + 2 \cdot (-1) \cdot 5 - (2 \cdot (-4) \cdot 3 + 2 \cdot (-3) \cdot 5 + (-3) \cdot (-1) \cdot (-1)) = 82$$

Následne určíme determinanty D_1 , D_2 , D_3 potrebné pre určenie neznámych. Tieto determinanty získame nahradením príslušného stĺpca determinantu číslami z matice B. Pre determinant D_1 teda dostávame:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ -18 & -4 & -3 \\ 10 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 8 + 90 - 180 + 80 + 30 + 54 = 82$$

Pre D_2 : $D_2 = 164$

Pre D_3 : $D_3 = 246$

Pre výpočet premenných už len determinanty D_1, D_2, D_3 vydelíme determinantom matice A (nazveme ho D):

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{82}{82} = 1$$

$$y = \frac{D_2}{D} = \frac{164}{82} = 2$$

$$z = \frac{D_3}{D} = \frac{246}{82} = 3$$

Riešením danej sústavy rovníc je usporiadaná trojica $[x, y, z] = [1, 2, 3]$.

3.3 Systém m lineárnych rovníc s n neznámymi

Rozšírením systému troch rovníc s tromi neznámymi na viac rovníc s viacerými neznámymi, dostávame systém m lineárnych rovníc s n neznámymi, ktorý má tvar:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Kde čísla a_{ij} , $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$, nazývame koeficientmi systému lineárnych rovníc.

Čísla b_i , $i = 1, 2, \dots, m$, nazývame absolútnymi členmi systému lineárnych rovníc a $x_1, x_2, \dots, x_n$ nazývame neznámymi.

Riešením systému lineárnych rovníc nazývame takú n -tícu čísel $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, že po dosadení čísel $a_1, a_2, \dots, a_n$ za x_n do systému rovníc dostaneme m správnych rovností.

Maticu

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

nazývame maticou systému (1).

Maticu

$$\begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \dots & a_{1n}, & b_1 \\ a_{21}, & a_{22}, & \dots & a_{2n}, & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \dots & a_{mn}, & b_m \end{pmatrix}$$

nazýváme rozšířenou maticou systému (1).

3.4 Cramerovo pravidlo

V tejto kapitole zovšeobecníme Cramerovo pravidlo pre systém n rovníc s n neznámymi.

Ak pre systém lineárnych rovníc (1) platí, že $m = n$ (počet rovníc sa rovná počtu neznámych) a determinant matice systému (1) je rôznyi od nuly ($D = |a_{ij}|_1^n \neq 0$), systém (1) má jediné riešenie

$$\left(\frac{D_1}{D}, \frac{D_2}{D}, \dots, \frac{D_n}{D}\right),$$

kde determinanty $D_1, D_2, \dots, D_n$ dostaneme z determinantu matice systému (1) nahradením prvého, druhého, ..., n -tého stĺpca stĺpcom absolútnych členov.

3.5 Eliminačná metóda

Dva systémy lineárnych rovníc nazývame ekvivalentnými, ak každé riešenie prvého systému je riešením i druhého systému a naopak.

Elementárnymi úpravami systému lineárnych rovníc nazývame nasledujúce úpravy:

1. Vzájomnú výmenu dvoch rovníc v systéme.
2. Vynásobenie ľubovoľnej rovnice systému číslom rôznym od nuly.
3. Pripočítanie lineárnej kombinácie zvyšných rovníc k danej rovnici systému.
4. Tieto úpravy prevádzajú daný systém rovníc na ekvivalentný systém lineárnych rovníc.

Uplatňovaním týchto úprav riešime sústavy lineárnych rovníc. Snažíme sa pomocou nich upraviť maticu na tzv. trojuholníkový tvar.

Vety o sústave rovníc:

Ak všetky koeficienty systému (1) sa rovnajú nule a aspoň jeden z absolútnych členov b_i je rôzny od nuly, systém (1) nemá riešenie.

Ak všetky koeficienty systému (1) sa rovnajú nule a všetky absolútne členy b_i sa rovnajú nule, každá n -tica čísel je riešením systému (1).

Ak sa všetky koeficienty systému (1) nerovnajú nule, systém možno riešiť **eliminačnou metódou**. Ak $a_{kl} \neq 0$, vzájomnou výmenou k -tej rovnice a prvej rovnice systému (1) a neznámych x_1 a x_l dostaneme nový systém, ktorý má prvý koeficient v prvej rovnici rovný a_{kl} . V tomto systéme vykonáme elementárne úpravy:

1. Vynásobíme prvú rovnicu číslom $\frac{1}{a_{kl}}$.
2. Pripočítame ku všetkým ostatným rovniciam také násobky prvej rovnice, aby koeficienty pri neznámej x sa rovnali nule.

Tak dostaneme systém, ktorý obsahuje neznámu x_1 iba v prvej rovnici, zvyšné rovnice obsahujú už iba $(n - 1)$ neznámych. Tento postup môžeme opakovať s ostatnými $(n - 1)$ rovnicami. Pritom môžu nastať dva prípady:

1. Postup možno vykonať práve m -krát.
2. Postup možno vykonať k -krát, kde $k < m$, t. j. všetky koeficienty zvyšných $(m - k)$ rovníc sa rovnajú nule.

Jedna alebo viac posledných $(m - k)$ rovníc má absolútne členy rôzne od nuly, t. j. má tvar $0 = \alpha$, kde $\alpha \neq 0$. Systém (1) nemá riešenie.

Všetkých zvyšných $(m - k)$ rovníc má absolútne členy rovnajúce sa nule, t. j. majú tvar $0 = 0$. Vynechaním týchto rovníc dostaneme ekvivalentný systém so systémom (1).

3.6 Homogénny systém lineárnych rovníc

Systém lineárnych rovníc nazývame homogénnym, ak všetky jeho absolútne členy sa rovnajú nule.

Každý homogénny systém lineárnych rovníc má nulové (triviálne) riešenie. Aby mal homogénny systém lineárnych rovníc nenulové riešenie, je nutné a postačujúce, aby hodnota matice systému bola menšia ako počet neznámych.

Ak sa v homogénnom systéme lineárnych rovníc počet rovníc rovná počtu neznámych, nutnou a postačujúcou podmienkou je, aby sa determinant systému rovnal nule.

Príklad 1:

Riešte systém lineárnych rovníc:

$$\begin{aligned}x_2 + 2x_3 &= -6 \\2x_1 - x_2 - x_3 &= 4 \\3x_1 + x_2 - x_3 &= 9 \\5x_1 + 2x_2 &= 9\end{aligned}$$

Riešenie:

Vymeníme prvú a druhú rovnicu:

$$\begin{aligned}2x_1 - x_2 - x_3 &= 4 \\x_2 + 2x_3 &= -6 \\3x_1 + x_2 - x_3 &= 9 \\5x_1 + 2x_2 &= 9\end{aligned}$$

Vynásobíme prvú rovnicu číslom $\frac{1}{2}$ a dočítame postupne vhodné násobky tejto rovnice od ostatných tak, aby vypadli členy s x_1 . Dostaneme:

$$\begin{aligned}x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 &= 2 \\x_2 + 2x_3 &= -6 \\ \frac{5}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 &= 3 \\ \frac{9}{2}x_2 + \frac{5}{2}x_3 &= -1\end{aligned}$$

Druhú rovnicu vynásobíme vhodnými číslami a odčítame od ostatných tak, aby vypadli členy s x_2 . Dostaneme:

$$\begin{aligned}
x_1 + \frac{1}{2}x_3 &= -1 \\
x_2 + 2x_3 &= -6 \\
-\frac{9}{2}x_3 &= 18 \\
-\frac{13}{2}x_3 &= 26
\end{aligned}$$

Vynásobíme tretiu rovnicu číslom $-\frac{2}{9}$ a odčítame vhodné násobky tejto rovnice od ostatných tak, aby vypadli členy s x_3 . Dostaneme:

$$\begin{aligned}
x_1 &= 1 \\
x_2 &= 2 \\
x_3 &= -4 \\
0 &= 0
\end{aligned}$$

Vynechaním poslednej rovnice dostaneme systém ekvivalentný so systémom pôvodným, ktorého riešením je trojica (1, 2, -4).

Príklad 2:

Riešte systém lineárnych rovníc:

$$\begin{aligned}
x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= 0 \\
3x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\
x_1 + 8x_2 - 13x_3 + 7x_4 &= 2
\end{aligned}$$

Riešenie:

Prvú rovnicu vynásobíme číslom 3 a odčítame od druhej rovnice. Potom prvú rovnicu vynásobíme číslom -1 a pripočítame k druhej rovnici. Dostaneme:

$$\begin{aligned}
x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= 0 \\
5x_2 - 8x_3 + 4x_4 &= 1 \\
10x_2 - 16x_3 + 8x_4 &= 2
\end{aligned}$$

Druhú rovnicu vynásobíme číslom $\frac{1}{5}$ a vhodné násobky tejto rovnice odčítame od ostatných tak, aby vypadli členy s x_2 . Dostaneme:

$$\begin{aligned}
x_1 + \frac{1}{5}x_3 + \frac{3}{5}x_4 &= \frac{2}{5} \\
x_2 - \frac{8}{5}x_3 + \frac{4}{5}x_4 &= \frac{1}{5} \\
0 &= 0
\end{aligned}$$

Vynechaním poslednej rovnice a presunutím voľných neznámych na pravú stranu rovnice dostaneme:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_4 + \frac{2}{5} \\
x_2 &= \frac{8}{5}x_3 - \frac{4}{5}x_4 + \frac{1}{5}
\end{aligned}$$

Ak položíme $x_3 = p$, podobne položíme $x_4 = q$. Z toho dostaneme

$$x_1 = \frac{1}{5}p - \frac{3}{5}q + \frac{2}{5}$$

$$x_2 = \frac{8}{5}p - \frac{4}{5}q + \frac{1}{5}$$

Riešením systému lineárnych rovníc je štvorica $(\frac{1}{5}p - \frac{3}{5}q + \frac{2}{5}, \frac{8}{5}p - \frac{4}{5}q + \frac{1}{5}, p, q)$, kde p a q sú ľubovoľné čísla. Nazývame ich parametre.

Príklad 3:

Riešte systém lineárnych rovníc:

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0$$

$$3x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1 + 8x_2 - 13x_3 + 7x_4 = 5$$

Riešenie:

Prvú rovnicu vynásobíme číslom -3 a pripočítame k druhej rovnici. Potom prvú rovnicu vynásobíme číslom -1 a pripočítame ju k druhej rovnici. Dostaneme:

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0$$

$$5x_2 - 8x_3 + 4x_4 = 1$$

$$10x_2 - 16x_3 + 8x_4 = 5$$

Druhú rovnicu vynásobíme číslom $\frac{1}{5}$. Potom túto rovnicu vynásobíme číslom -10

a pripočítame k tretej rovnici. Dostaneme:

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0$$

$$x_2 - \frac{8}{5}x_3 + \frac{4}{5}x_4 = \frac{1}{5}$$

$$0 = 3$$

Z poslednej rovnice vyplýva, že systém lineárnych rovníc nemá riešenie.

Príklad 4:

Pomocou Cramerovho pravidla riešte systém lineárnych rovníc:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 8$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10$$

$$4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4$$

Riešenie:

Vypočítame hodnotu determinantu D:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -4 + 8 + 9 - (8 + 3 - 12) = 13 + 1 = 14$$

Vypočítame hodnoty determinantov D_1, D_2, D_3 .

$$D_1 = \begin{vmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 10 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 10 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -32 + 8 + 30 - (8 + 24 - 40) = 6 + 8 = 14$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 3 & 10 & 1 \\ 4 & 4 & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 3 & 10 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = -20 + 32 + 12 - (40 + 4 - 48) = 24 + 4 = 28$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 3 & 2 & 10 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 8 + 80 + 72 - (64 + 30 + 24) = 160 - 118 = 42$$

Vypočítame neznáme x_1, x_2, x_3 :

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{14}{14} = 1$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{28}{14} = 2$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{42}{14} = 3$$

Riešením systému lineárnych rovníc je trojica (1, 2, 3).

Príklady:

1. Zistite, či dané n-tice sú riešeniami rovnice:

- a) $2x + 3y = 11$ (0, -3), (1, 2), (7, -1)
 b) $x - y + 2z = -1$ (1, 1, 1), (2, -3, 0), (-1, -2, -1)
 c) $2x + y + z + u = 0$ (0, 0, 0, 0), (1, -1, -2, 1)

2. Ukážte, že n-tica (1, 2, 5) je riešením systému lineárnych rovníc:

$$\begin{aligned} 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 2 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 5 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 9 \end{aligned}$$

3. Riešte systémy lineárnych rovníc:

- a) $\begin{aligned} 8x - 3y + 12 &= 0 \\ 3x + 2y - 33 &= 0 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} 2x - 6y &= -2 \\ x - 3y &= 4 \end{aligned}$
 c) $\begin{aligned} x + 2y &= 4 \\ 2x + 4y &= 8 \end{aligned}$ d) $\begin{aligned} 4x - 5y &= 39 \\ 5x + 5y &= 78 \end{aligned}$

4. Pomocou Cramerovho pravidla riešte systémy lineárnych rovníc:

a)
$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + x_3 &= 11 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 &= 7 \\ 11x_1 - 4x_2 - 3x_3 &= 10 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 12 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x - 2y + 2z &= -9 \\ 3x + 5y + 4z &= 10 \\ 5x + 12y + 6z &= 29 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 3x_1 - 5x_2 - 2x_3 &= -3 \\ 7x_1 - 3x_2 + x_3 &= 16 \end{aligned}$$

5. Riešte systémy lineárnych rovníc:

a)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 7 \\ x_1 - x_3 &= -2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 7 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 &= 11 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= -2 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= 10 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= -7 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 &= 8 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 27x_1 - 19x_2 + 22x_3 - 35x_4 &= 6 \\ 20x_1 - 13x_2 + 14x_3 - 13x_4 &= -23 \\ 8x_1 - 2x_2 + 6x_3 - 10x_4 &= 10 \\ 9x_1 - 4x_2 + 7x_3 - 8x_4 &= -3 \\ 18x_1 - 9x_2 + 12x_3 - 17x_4 &= 3 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 2 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 &= 4 \end{aligned}$$

6. Riešte systémy homogénnych lineárnych rovníc:

a)
$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 0 \\ 3x - y &= 0 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 0 \\ 4x + 6y &= 0 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 0 \\ x_1 - 3x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 &= 0 \\ x_1 + 6x_2 + 10x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Výsledky:

1.

a) Riešením je (7, -1)

b) Riešením je (-1, -2, -1)

c) Riešením sú (0, 0, 0, 0) a (1, -1, -2, 1)

2.

Je riešením.

3.

a) (3, 12)

b) nemá riešenie

c) (4 - 2a, a), kde a je ľubovoľné číslo

d) $\left(13\frac{13}{5}\right)$

4.

a) nemá riešenie

b) (2, 3, 5)

c) $(-18a + 1, 2a + 3, 11a - 2)$, kde a je ľubovoľné číslo

d) (3, 2, 1)

5.

a) (1, 2, 3)

b) (3, 0, -5, 11)

c) (1, 2, -4, -3)

d) (4, 1, -3)

6.

a) (0, 0)

b) (3a, -2a)

c) (13a, 2a, 7a)

d) $(2 + a, 2 - a, 3 + a, a)$

4 FUNKCIA JEDNEJ REÁLNEJ PREMENNEJ

Majme dve neprázdné množiny M a N . Hovoríme, že na množine M je definovaná funkcia f , ak je daný predpis, podľa ktorého každému prvku z množiny M je priradený jeden prvok z množiny N .

Množinu M nazývame definičným oborom funkcie f .

Podmnožinu prvkov z N , ktorá je obrazom množiny M , nazývame oborom hodnôt funkcie f .

Množiny M a N znázorňujeme na číselných osiach. Na osi x znázorňujeme množinu M – definičný obor funkcie a na osi y znázorňujeme množinu N – obor hodnôt funkcie. Definičný obor funkcie f označujeme $D(f)$. Obor hodnôt funkcie f označujeme $H(f)$.

Osi znázorňujeme tak, aby spolu zvierali pravý uhol, pričom os x býva horizontálna a os y vertikálna. Pravouhlá sústava osí x a y , ktorá nám slúži na znázorňovanie grafov funkcií sa nazýva karteziánska sústava súradníc.

Funkcia je najčastejšie určená:

- matematickou formulou (rovniciou) v tvare $y = f(x)$, ktorá môže mať dve formy:
explicitná rovnica, napr. $f = \{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}; y = x^2 - 1\}$,
implicitná rovnica, napr. $x^2 + y^2 = 25$

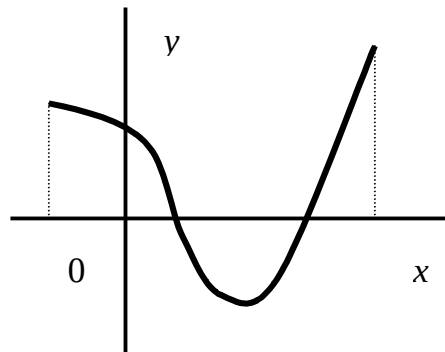
- tabuľkou

x	-2	-1	0	1	2	3
y	3	0	-1	0	3	8

Tiež zadanie funkcie výpočtom prvkov je možné považovať za zadanie tabuľkou, ide len o inú formu zápisu,

napr. $f = \{(-2; 3), (-1; 0), (0; -1), (1; 0), (2; 3), (3; 8)\}$.

- verbálnym (slovným) predpisom
Napr. výroková forma $V(x, y) = \text{„}y \text{ je dvojnásobkom čísla } x\text{“}$
- graficky



Grafom bývajú často vyjadrené tie funkcie, ktorých priebeh je zapisovaný v prístrojoch graficky na papierové médiá alebo na displeji (napr. ako výsledok merania).

4.1 Elementárne funkcie

Pojem „elementárne funkcie“ je skôr historický ako matematický. Vymedzuje niekoľko základných elementárnych funkcií, z ktorých sa pomocou konečného počtu algebraických operácií a operáciou skladania vytvárajú ďalšie funkcie, ktoré nazývame algebraickými funkciami. Platí, že s každou funkciou patrí do množiny elementárnych funkcií vždy aj funkcia inverzná, pokiaľ existuje.

Základné elementárne funkcie sú:

- konštantná funkcia ($y = c$);
- mocninová funkcia ($y = x^r$ pre ľubovoľné $r \in \mathbb{R}$, patria sem aj odmocniny a tiež napr. nepriama úmernosť);
- goniometrické funkcie ($y = \sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{cotg} x$) a funkcie cyklometrické ($y = \arcsin x, \arccos x, \operatorname{arctg} x, \operatorname{arccotg} x$);
- exponenciálna funkcia ($y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$) a funkcia logaritmická ($y = \log_a x$);
- hyperbolické funkcie ($y = \sinh x, \cosh x, \operatorname{tgh} x, \operatorname{cotgh} x$) a funkcie hyperbolometrické ($y = \operatorname{arcsinh} x, \operatorname{arccosh} x, \operatorname{arctgh} x, \operatorname{arccotgh} x$).

Algebraická funkcia je názov pre elementárnu funkciu, ktorá vznikne z funkcií konštantných a z funkcie $f(x) = x$ použitím operácií sčítanie, odčítanie, násobenie, delenie a odmocňovanie. Pokiaľ nepoužijeme operáciu odmocňovanie, dostaneme algebraické funkcie racionálne. Algebraické funkcie, ktoré nie sú racionálne, nazývame iracionálne. Zvláštne prípady algebraických funkcií: napr. celá racionálna funkcia alebo funkcia polynomická (algebraický polynóm) a lomená racionálna funkcia, patria medzi najvýznamnejšie funkcie študované v matematike.

Elementárne funkcie, ktoré nie sú algebraické, sa obvykle nazývajú transcendentné. Zo základných elementárnych funkcií medzi ne patria funkcie exponenciálne, logaritmické, goniometrické, cyklometrické, hyperbolické a hyperbolometrické, ale aj mocninová funkcia s iracionálnym exponentom.

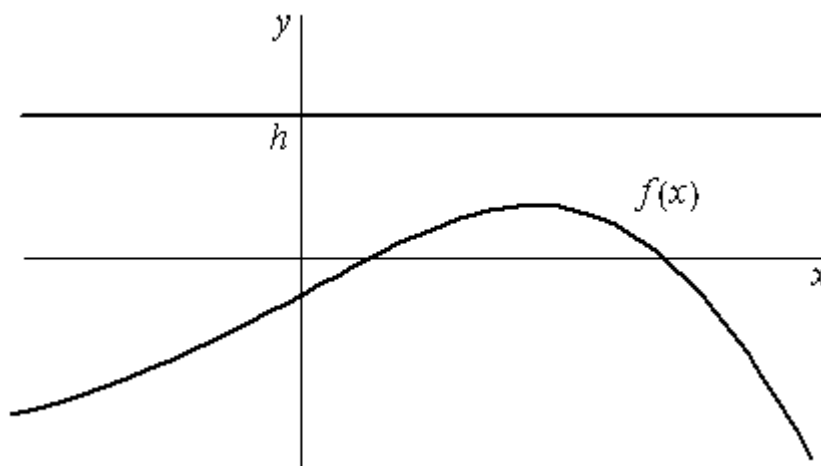
4.2 Vlastnosti funkcie

V tejto kapitole popíšeme základné vlastnosti funkcií. Sústreďme sa najmä na tie vlastnosti, ktoré budú potrebné v ďalších kapitolách. Vlastnosti funkcií budú doplnené obrázkami, ktoré umožňujú lepšiu predstavu uvádzaných vlastností.

4.2.1 Ohraničenosť funkcie

Funkcia sa nazýva zhora (zdola) ohraničená na množine $M \subset D(f)$ práve vtedy, ak túto vlastnosť má množina $f(M)$.

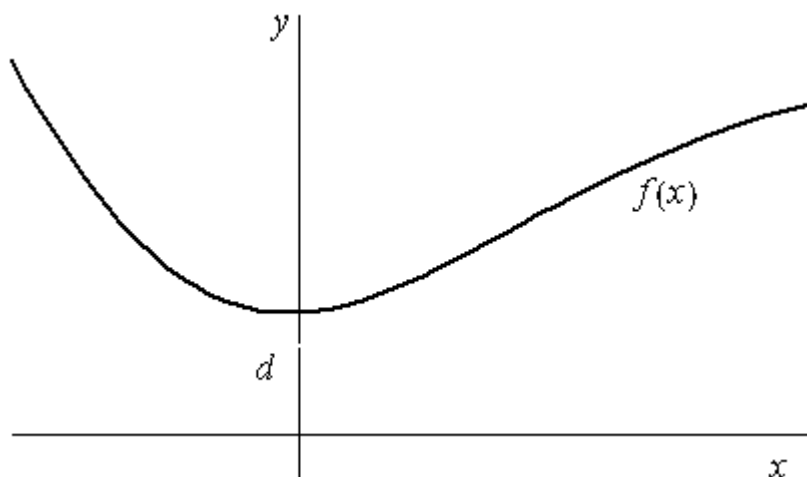
Funkcia sa nazýva zhora (zdola) ohraničená práve vtedy, ak túto vlastnosť má množina $H(f)$. Na obrázku je zhora ohraničená funkcia.



Obrázok 1 Zhora ohraničená funkcia

(zdroj: http://slovak.evlm.stuba.sk/elearning/elearning_files/vlastnfunkcii.xml)

Na ďalšom obrázku uvádzame príklad funkcie, ktorá je ohraničená zdola.



Obrázok 2 Zdola ohraničená funkcia

(zdroj: http://slovak.evlm.stuba.sk/elearning/elearning_files/vlastnfunkcii.xml)

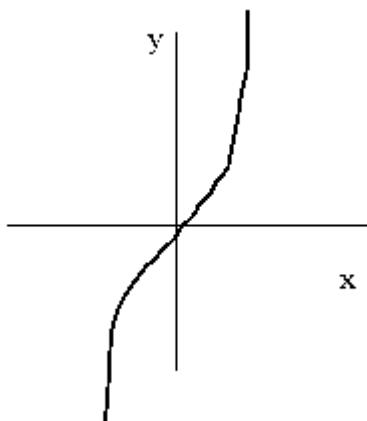
Existujú aj funkcie, napr. funkcia $y = x^2$, ktorá je ohraničená zdola, nie je ohraničená zhora a nie je ohraničená, ale na množine $\langle -10, 10 \rangle$ je ohraničená.

4.2.2 Monotónnosť funkcie

Vlastnosti funkcií ako rastúcosť, klesajúcosť, neklesajúcosť a nerastúcosť označujeme spoločným názvom monotónnosť.

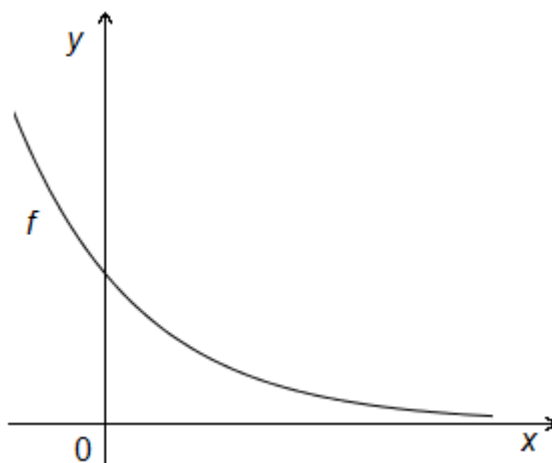
Funkcia f sa nazýva rastúca (klesajúca, neklesajúca, nerastúca) na množine $M \subset D(f)$ práve vtedy keď pre každé $\forall x_1, x_2 \in M$ platí: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$, $f(x_1) \leq f(x_2)$, $f(x_1) \geq f(x_2)$).

Funkciu f rastúcu (klesajúcu, neklesajúcu, nerastúcu) na $D(f)$ nazývame rastúcou (klesajúcou, neklesajúcou, nerastúcou). Pre funkcie rastúce a klesajúce používame súhrnný názov rýdzo monotónne funkcie. Všetky štyri uvedené druhy funkcií nazývame monotónne funkcie.



Obrázok 3 Rastúca funkcia

(zdroj: http://www.oskole.sk/?id_cat=2&clanok=16535)



Obrázok 4 Klesajúca funkcia

(zdroj: http://www.gymmoldava.sk/ICV/CELYWEB/maturita/mat2012_6903.htm)

Napr. funkcia $y = \frac{1}{x}$ je klesajúca na intervale $(-\infty, 0)$ a je klesajúca i na intervale $(0, +\infty)$, ale nie je klesajúca (t.j. nie je klesajúca na $D(f)$).

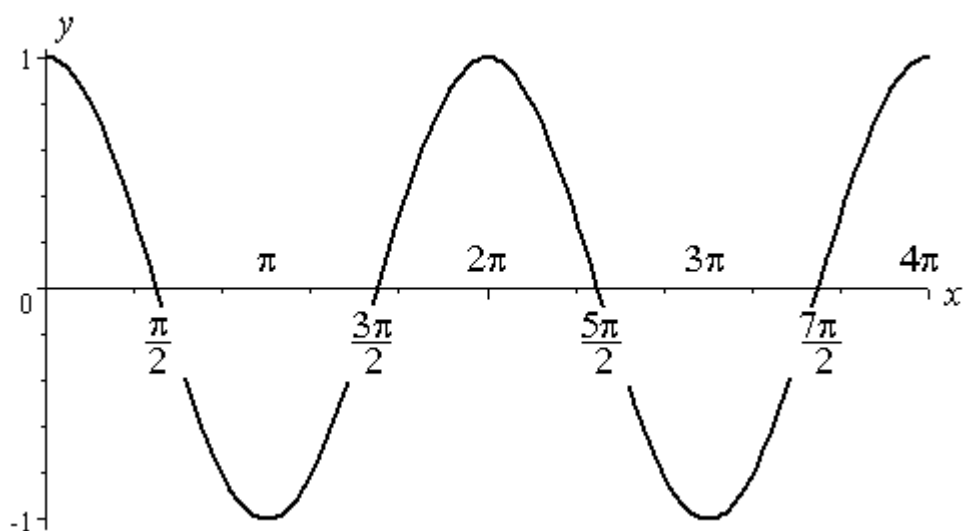
4.2.3 Párnosť a nepárnosť funkcie

Funkcia f sa nazýva párna (nepárna) práve vtedy, keď platí:

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ platí } x \in D(f) \Rightarrow (-x \in D(f)) \wedge (f(-x) = f(x)) \quad [f(-x) = -f(x)].$$

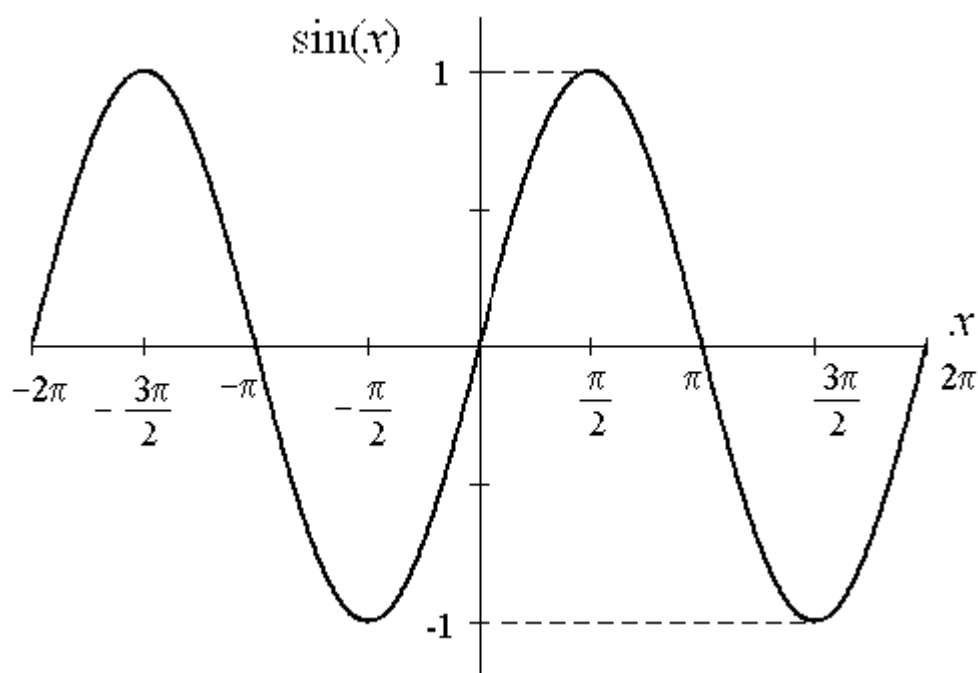
Inými slovami, funkčná hodnota párnej funkcie pre x vynásobené mínus jednotkou zodpovedá funkčnej hodnote v čísle x . Naopak, funkčná hodnota nepárnej funkcie pre x vynásobené mínus jednotkou zodpovedá funkčnej hodnote v čísle x , ktorá je vynásobená mínus jednotkou.

Príklad párnej funkcie: $y = \cos x$, príklad nepárnej funkcie: $y = \sin x$.



Obrázok 5 Párna funkcia

(zdroj: <http://www.intmath.com/trigonometric-graphs/4-graphs-tangent-cotangent-secant-cosecant.php>)



Obrázok 6 Nepárna funkcia

(zdroj: <http://easymat.wz.cz/grov.html>)

Pre polynomicke funkcie platí: ak sú v polynóme len členy s párnymi exponentmi, je daná funkcia párna, ak sú tam len členy s nepárnymi exponentmi, je funkcia nepárna.

Karteziánsky graf párnej funkcie je súmerný podľa osi y, graf nepárnej funkcie je súmerný podľa počiatku súradnicového systému.

4.2.4 Periodickosť funkcie

Funkcia sa nazýva periodická práve vtedy, ak platí:

$\exists p \in \mathbb{R}, p \neq 0$ tak, že $\forall x \in \mathbb{R}$ platí

1. $x \in D(f) \Rightarrow (x \pm p) \in D(f)$

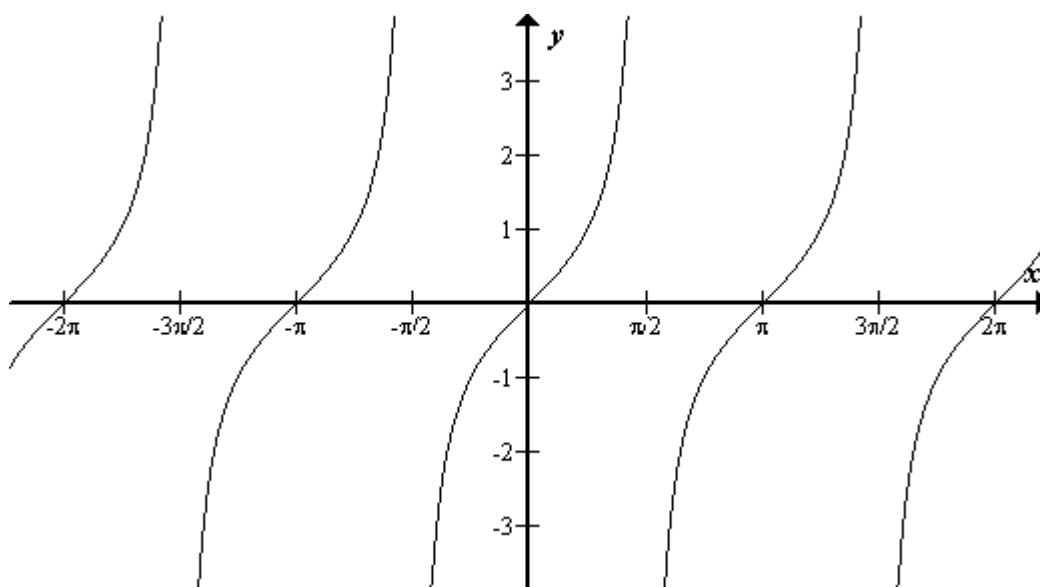
2. $\forall x \in D(f): f(x \pm p) = f(x).$

Číslo p sa nazýva perióda funkcie f .

Ak p je perióda funkcie f , je $\forall k \in \mathbb{Z}$ tiež číslo kp periódou funkcie f . Najmenšia kladná perióda p_0 , pokiaľ existuje, sa nazýva primitívna (tiež základná) perióda funkcie f .

Konštantnú funkciu spravidla medzi periodické funkcie nepočítame.

Príklady periodických funkcií: $y = \sin x$ ($p_0 = 2\pi$), $y = \operatorname{tg} x$ ($p_0 = \pi$).



Obrázok 7 Periodická funkcia

(zdroj: http://www2.arnes.si/~mpavle1/mp/trigo_f.html)

4.2.5 Spojitosť funkcie

Majme funkciu f , ktorá je definovaná v okolí daného čísla a . Hovoríme, že funkcia f je v číslu a spojitá, ak postupnosť $\{f(a_1), f(a_2), f(a_3), \dots, f(a_n), \dots\}$ konverguje k číslu $f(a)$ pre každú postupnosť $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}$, ktorá konverguje k číslu a .

Ak pre každý člen postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ platí $a_n < a$, funkcia f je spojitá zľava v číslu a .

Ak pre každý člen postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ platí $a_n > a$, funkcia f je spojitá sprava v číslu a .

Body, v ktorých funkcia nie je spojitá, nazývame bodmi nespojitosti.

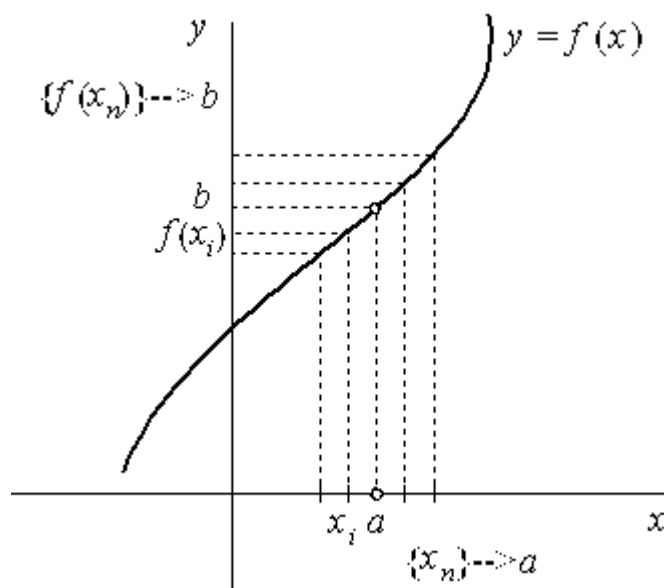
Funkcia f je spojitá na intervale J , ak:

- je spojitá v každom vnútornom bode intervalu J ,
- sprava spojitá v ľavom koncovom bode intervalu J , ak ten bod patrí do intervalu J ,
- zľava spojitá v pravom koncovom bode intervalu J , ak ten bod patrí do J .

4.3 Limita funkcie

Majme funkciu f , ktorá je definovaná v okolí daného bodu a , pričom v samotnom bode a nemusí byť definovaná.

Číslo b je limitou funkcie f v čísle a , ak postupnosť $\{f(a_1), f(a_2), f(a_3), \dots, f(a_n), \dots\}$ konverguje k číslu b pre každú postupnosť $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}$, ktorá konverguje k číslu a , pričom každý člen postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je z definičného oboru funkcie f a je rôzny od čísla a .



Obrázok 8 Limita funkcie

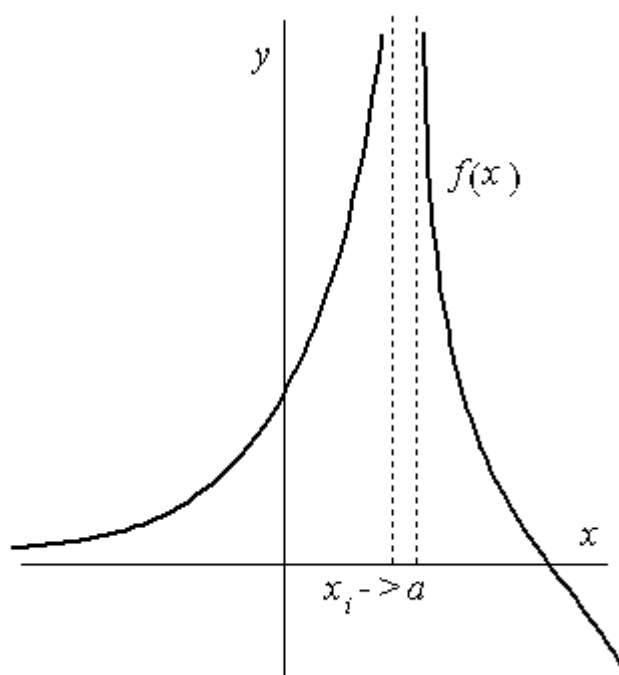
(zdroj: <http://www.evln.stuba.sk/~velichova/PREDNASKY/Prednaska7.xml>)

Číslo $\pm\infty$ je nevlastnou limitou funkcie v čísle a , ak postupnosť $\{f(a_1), f(a_2), f(a_3), \dots, f(a_n), \dots\}$ nevlastne konverguje k $\pm\infty$ pre každú postupnosť $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}$, ktorá konverguje k číslu a , pričom každý člen postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je z definičného oboru funkcie f a je rôzny od čísla a .

Limitu funkcie f v čísle a označujeme:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$$

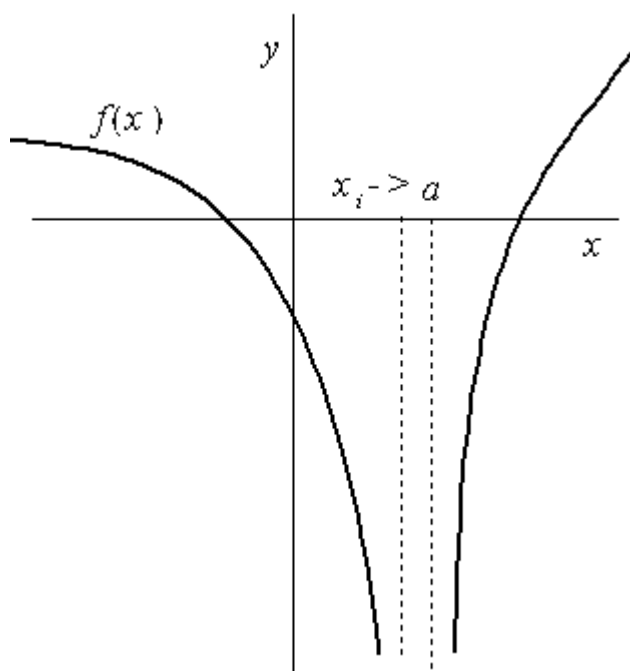
Stručne povedané, skutočnosť, že funkcia f má v bode a nevlastnú limitu ∞ , resp. $-\infty$ znamená, že ak sa x približuje k číslu a (ale nerovná sa a), hodnoty funkcie $f(x)$ sa stále zväčšujú, resp. zmenšujú, rastú nad všetky medze (obr. 9, obr. 10).



Obrázok 9 Nevlastná limita ∞

(zdroj: http://www.evln.stuba.sk/~velichova/KNIHA/Kapitola4/Cast4_1.xml)

Ak bod a v predchádzajúcej definícii je reálne číslo, tak hovoríme o limite vo vlastnom bode, v opačnom prípade hovoríme o limite v nevlastnom bode. Ak hodnota b limity je reálne číslo, tak hovoríme o vlastnej limite, v opačnom prípade hovoríme o nevlastnej limite.



Obrázok 10 Nevlastná limita - ∞

(zdroj: http://www.evln.stuba.sk/~velichova/KNIHA/Kapitola4/Cast4_1.xml)

Ak pre každý člen postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ v definícii limity navyše platí $a_n < a$, hovoríme o limite zľava a označujeme ju $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$.

Ak pre každý člen postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ v definícii nevlastnej limity navyše platí $a_n < a$, hovoríme o nevlastnej limite zľava a označujeme ju $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$.

Ak pre každý člen postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ v definícii limity navyše platí $a_n > a$, hovoríme o limite sprava a označujeme ju $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$.

Ak pre každý člen postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ v definícii nevlastnej limity navyše platí $a_n > a$, hovoríme o nevlastnej limite sprava a označujeme ju $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$.

Ak funkcie f a g majú limity v čísle a rovnajúce sa číslam L_1, L_2 , potom platí:

Nech $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$ a $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2$ a nech $L_1, L_2, c \in \mathbb{R}$. Potom:

1. funkcia $f + g$ má limitu v bode a , pričom platí:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = L_1 \pm L_2$$

2. funkcia $f \cdot g$ má limitu v bode a , pričom platí:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = L_1 \cdot L_2$$

3. funkcia $c \cdot f$ má limitu v bode a , pričom platí:

$$\lim_{x \rightarrow a} [c \cdot f(x)] = c \cdot L_1$$

4. pre $L_2 \neq 0$ aj funkcia $\frac{f}{g}$ má limitu v bode a , pričom platí:

$$\lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$$

Pre počítanie limít potrebujeme vedieť ako vypočítame základné limity, teda určité vzorce, ktoré sú odvodené pre niektoré základné funkcie.

Pravidlá pre limity:

1. Pre každé $a \in R$ platí:

$$\lim_{x \rightarrow a} c = c; \quad c \in R$$

2. Pre každé $a \in R$ platí:

$$\lim_{x \rightarrow a} x = a$$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} = 0$, kde n je prirodzené číslo

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a$

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty$, kde $a > 1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$, kde $a < 1$

Keby sme mali veľmi jednoducho opísať, čo to vlastne limita je, mohli by sme to formulovať takto: Limita funkcie f pre x blížiac sa ku konkrétnemu číslu x_0 je také číslo, ktoré by zodpovedalo funkčnej hodnote funkcie f v bode x_0 vtedy, keby funkcia f bola v tomto bode spojitá. Pritom nie je dôležité, či funkcia je v bode x_0 spojitá alebo nie, dôležité je, aby bola funkcia v okolí bodu x_0 definovaná

4.4 Použitie výpočtov pomocou limity

Limity nám pomáhajú pri výpočte úloh, ktoré by sme dosadením za neznámu nevypočítali, ide najmä o použitie v dvoch základných formách:

Delenie nulou. Ak výpočet hodnoty funkcie nie je možný z toho dôvodu, že v menovateli by sme dostali delenie nulou, nepočítame hodnotu danej funkcie v bode x_0 , ale limitu v bode x , ktorá sa blíži k hodnote x_0 .

Počítanie s nekonečnom. Nekonečno nie je možné dosadzovať do výrazov, nakoľko funkčné hodnoty pre nekonečno nie sú definované. Funkčné hodnoty v bode nekonečno preto počítame pomocou limity v bode x , ktorý sa blíži k nekonečnu.

Príklad 1:

Vypočítajte:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} x^3 \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x + 2}{x - 2}$$

Riešenie:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} x^3 = \lim_{x \rightarrow 2} 2^3 = \lim_{x \rightarrow 2} 8 = 8$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = \lim_{x \rightarrow 2} (2+2) = \lim_{x \rightarrow 2} 4 = 4$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x + 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 \cdot 4 + 2}{4 - 2} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{14}{2} = \lim_{x \rightarrow 4} 7 = 7$$

Príklad 2:

Vypočítajte limity:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^4 - 1} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 4x} \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x-1}$$

Riešenie:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^4 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{(x^2 - 1)(x^2 + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{(x-1)(x+1)(x^2 + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 1}{x^3 + x^2 + x + 1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1+1+1}{1+1+1+1} = \frac{3}{4}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 3x}{3x} \cdot 3}{\frac{\sin 4x}{4x} \cdot 4} = \frac{3}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 3x}{3x}}{\frac{\sin 4x}{4x}} = \frac{3}{4} \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{4x}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{1} = \frac{3}{4}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x-1} \quad \text{Limitu nemôžeme vypočítať priamo, lebo v čitateli a menovateli}$$

máme nevlastné limity. V takýchto prípadoch, keď počítame limitu racionálnej funkcie v nevlastnom čísle ∞ , vydelíme čitateľa aj menovateľa najvyššou mocninou x , ktorá je v menovateli. V našom prípade vydelíme čitateľa aj menovateľa x . Dostaneme:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}}{\lim_{x \rightarrow \infty} 1 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}} = \frac{1+0}{1-0} = 1$$

Príklad 3:

Riešte limity:

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n+1}{n} + \frac{2n^2+1}{n^2+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4+\frac{1}{n}}{1} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}} = \frac{4+0}{1} + \frac{2+0}{1+0} = 6$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1-x}{x^2} - \frac{1-2x^2}{2-3x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}}{1} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^2} - 2}{\frac{2}{x^2} - 3} = \frac{0+0}{1} - \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{1+0} = 1$$

$$\text{d) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n^2}} = \frac{0}{1+0} = 0$$

$$\text{e) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3-5n^2-2n^4}{3-2n^5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{n^5} - \frac{5}{n^3} - \frac{2}{n}}{\frac{3}{n^5} - 2} = \frac{0-0-0}{0-2} = 0$$

$$\text{f) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^r = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \right)^r = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \right)^r = \left(\frac{1}{1+0} \right)^r = 1^r = 1$$

$$\text{g) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1}{n^2-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{1}{n^2}}{1-\frac{1}{n^2}} = \frac{1+0}{1-0} = 1$$

$$\text{h) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-3x+2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2) \cdot (x-1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-1)} = \frac{1}{2-1} = 1$$

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) \cdot (x+1)}{(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 1+1 = 2$$

$$\text{j) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2-5x+6} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{(x-3) \cdot (x-2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(x-2)} = \frac{1}{3-2} = 1$$

$$\text{k) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2) \cdot (x+2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 2+2 = 4$$

$$l) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^3 - 3x^2 + 2x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2) \cdot (x+1)}{x \cdot (x-2) \cdot (x-1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+1)}{x \cdot (x-1)} = \frac{2+1}{2 \cdot (2-1)} = \frac{3}{2}$$

$$m) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 5x + 4}{x^3 - 1} = \left| \begin{array}{l} x^3 - 1 = (x-1) \cdot (x^2 + x + 1) \\ (x^3 - 5x + 4) : (x-1) = x^2 + x - 4 \\ \hline -(x^3 - x^2) \\ x^2 - 5x + 4 \\ \hline -(x^2 - x) \\ \hline -4x + 4 \end{array} \right| = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) \cdot (x^2 + x - 4)}{(x-1) \cdot (x^2 + x + 1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 4}{x^2 + x + 1} = \frac{1^2 + 1 - 4}{1^2 + 1 + 1} = -\frac{2}{3}$$

$$n) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 2x} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2) \cdot (x-1)}{x \cdot (x+2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x-1}{x} = \frac{-2-1}{-2} = \frac{3}{2}$$

$$o) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^3 + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1) \cdot (x-2)}{(x+1) \cdot (x^2 - x + 1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-2}{x^2 - x + 1} = \frac{-1-2}{(-1)^2 - (-1) + 1} = -1$$

$$p) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n^3 - 1}}{n^{\frac{3}{2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2n^3 - 1}{n^3}} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2 - \frac{1}{n^3}} = \sqrt{2}$$

$$q) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \sqrt{1-x}) \cdot (1 + \sqrt{1-x})}{x \cdot (1 + \sqrt{1-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1-x)}{x + x \cdot \sqrt{1-x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x + \sqrt{x^2 \cdot (1-x)}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{x^2 \cdot (1-x)}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \sqrt{1-x}} = \frac{1}{1 + \sqrt{1-0}} = \frac{1}{2}$$

$$r) \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 - 1}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x - \sqrt{x^2 - 1}) \cdot (x + \sqrt{x^2 - 1})}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - (x^2 - 1)}{x + \sqrt{x^2 - 1}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - (x^2 - 1)}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 + \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = \frac{0}{1+1} = 0$$

$$s) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{2}}{x} \cdot \frac{\sqrt{2+x} + \sqrt{2}}{\sqrt{2+x} + \sqrt{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2+x-2}{x \cdot (\sqrt{2+x} + \sqrt{2})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2+x} + \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\begin{aligned}
 \text{t) } \lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n^2 + n}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n - \sqrt{n^2 + n}) \cdot (n + \sqrt{n^2 + n})}{n + \sqrt{n^2 + n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - (n^2 + n)}{n + \sqrt{n^2 + n}} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n}{\frac{n}{n} + \sqrt{\frac{n^2 - n}{n^2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}} = \frac{-1}{1 + \sqrt{1}} = -\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\text{u) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x+6}{x^3+8} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3 \cdot (x+2)}{(x+2) \cdot (x^2-2x+4)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3}{x^2-2x+4} = \frac{3}{4+4+4} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$

$$\begin{aligned}
 \text{v) } \lim_{x \rightarrow \infty} (3x - \sqrt{9x^2 - 10x + 1}) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x - \sqrt{9x^2 - 10x + 1}) \cdot (3x + \sqrt{9x^2 - 10x + 1})}{3x + \sqrt{9x^2 - 10x + 1}} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^2 - (9x^2 - 10x + 1)}{3x + \sqrt{9x^2 - 10x + 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10x - 1}{3x + \sqrt{9x^2 - 10x + 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10 - \frac{1}{x}}{3 + \sqrt{9 - \frac{10}{x} + \frac{1}{x^2}}} = \\
 &= \frac{10}{3 + \sqrt{9}} = \frac{5}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{w) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{x^2 + 1}}{x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2}} + \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2}} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} + \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = \sqrt{1 - 0} + \sqrt{1 + 0} = 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{x) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{(1+x) - (1-x)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}) = \frac{\sqrt{1+0} + \sqrt{1-0}}{2} = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{y) } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1+x+x^2-3}{(1-x)(1+x+x^2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+2)(x-1)}{(1-x)(1+x+x^2)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x+2)(1-x)}{(1-x)(1+x+x^2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x-2}{1+x+x^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1-2}{1+1+1^2} = -1
 \end{aligned}$$

$$\text{z) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x^2}{1-x^2} + 2^{\frac{1}{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{\frac{1}{x^2} - 1} + 2^{\frac{1}{x}} \right) = -\frac{5}{1} + 2^0 = -4$$

Príklad 4:

Riešte limity s goniometrickými funkciami:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} = 5 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} = 5 \cdot 1 = 5$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot \frac{1}{1} = 1$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{2}$$

Poznámka: v ďalších úlohách použijeme nasledovné vzťahy:

$$\begin{aligned} 1 &= \sin^2 x + \cos^2 x \\ \sin 2x &= 2 \cdot \sin x \cdot \cos x \\ \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \end{aligned}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{\sqrt{1 - \cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos x} \sqrt{1 + \cos x}}{\sqrt{1 - \cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1 + \cos x} = \sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{2}}{\sqrt{x+2} + \sqrt{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x+2-2} (\sqrt{x+2} + \sqrt{2}) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} 3 \frac{\sin 3x}{3x} (\sqrt{x+2} + \sqrt{2}) = 3 \cdot 1 \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{2}) = 6\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x + \operatorname{tg}^2 x}{x \cdot \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x + \cos^2 x - (\cos^2 x - \sin^2 x)}{x \cdot \sin x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x \cdot \sin x \cdot \cos^2 x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 3 \end{aligned}$$

Príklady:

1. Vypočítajte limity funkcií:

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) \quad b) \lim_{x \rightarrow 3} (4x^2 - 7x + 1) \quad c) \lim_{x \rightarrow 2} \left(2^{x^2} + 6x + \frac{1}{x} \right)$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}) \quad e) \lim_{x \rightarrow -1} (1 + x^2) \quad f) \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3x + 2)$$

2. Vypočítajte limity:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x^2 - 1} - \frac{2}{x^4 - 1} \right) & \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^3 + 4x^2 - 5x}{x} \\ \text{d) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2(x-2)}{(x^2+1)(x^2-4)} & \text{e) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + 7x - 44}{x^2 - 6x + 8} & \text{f) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2} \end{array}$$

3. Vypočítajte limity funkcií v bode ∞ :

$$\begin{array}{lll} \text{a) f: } y = \frac{8x^3}{x^6 + 3} & \text{b) g: } y = \frac{-2x^2 + 25x + 111}{3x^2 - 4x} & \text{c) h: } y = \frac{11x^4 + 29x}{85 - 7x^3} \\ \text{d) i: } y = x\sqrt{x^2 + 9} - x & \text{e) j: } y = \frac{3x^4 + 6x^2 - 4}{x^4 + x^3 + 1} & \text{f) k: } y = \frac{4x^2 + 5x + 52}{12x^2 + 18} \end{array}$$

4. Vypočítajte limity:

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\sin 7x} & \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{3x} & \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x}{\sin 9x} & \text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\operatorname{tg} 6x} \\ \text{e) } \lim_{x \rightarrow 0} x \cot g x & \text{f) } \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{tg} x & \text{g) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{x^2} \end{array}$$

Výsledky:

1.

$$\text{a) } 2 \quad \text{b) } 26 \quad \text{c) } \frac{7}{2} \quad \text{d) } 1 - \sqrt{3} \quad \text{e) } 2 \quad \text{f) } 0$$

2.

$$\text{a) } 2 \quad \text{b) } \frac{1}{2} \quad \text{c) } -5 \quad \text{d) } \frac{1}{5} \quad \text{e) } \frac{15}{2} \quad \text{f) } 4$$

3.

$$\text{a) } 0 \quad \text{b) } -\frac{2}{3} \quad \text{c) } -\infty \quad \text{d) } \frac{9}{2} \quad \text{e) } 3 \quad \text{f) } \frac{1}{3}$$

4.

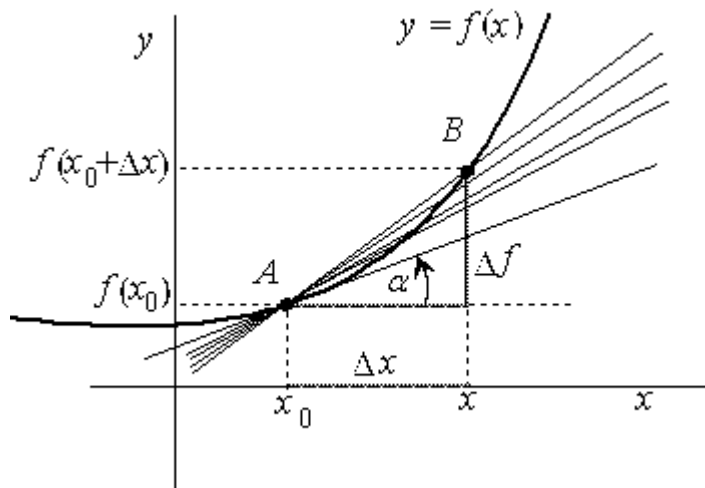
$$\text{a) } \frac{3}{7} \quad \text{b) } \frac{4}{3} \quad \text{c) } \frac{8}{9} \quad \text{d) } \frac{5}{6} \quad \text{e) } 1 \quad \text{f) } 0 \quad \text{g) } 1$$

5 DERIVÁCIA FUNKCIE

Nech funkcia f je definovaná na množine M a nech je číslo $x_0 \in M$. Deriváciou $f'(x_0)$ funkcie f v čísle x_0 nazývame číslo

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Deriváciu $f'(x_0)$ označujeme aj takto: $\left[f(x_0)' \right]_{x=x_0}$, $y'(x_0)$, $\left[\frac{df}{dx} \right]_{x=x_0}$, $\left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=x_0}$.



Obrázok 11 Geometrická interpretácia derivácie funkcie

(zdroj: <http://www.evln.stuba.sk/~velichova/PREDNASKY/Prednaska9.xml>)

Deriváciou funkcie f v bode x_0 teda rozumieme číslo, ktoré zodpovedá smernici dotyčnice k funkcii $f(x)$ v bode x_0 .

Derivácia funkcie f sprava v čísle x_0 je číslo

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Derivácia funkcie f zľava v čísle x_0 je číslo

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Nech M je množina všetkých tých čísel, v ktorých má funkcia f deriváciu. Ak každému číslu $x_0 \in M$ priradíme deriváciu funkcie f v číslu x_0 , dostaneme funkciu, ktorej definičným oborom je množina M a nazývame ju deriváciou funkcie f na množine M .

Označujeme ju f' , $(f)'$, y' alebo $\frac{df}{dx}$, $\frac{df(x)}{dx}$, $\frac{dy}{dx}$.

Vlastnosti derivácie:

1. Derivácia funkcie f v číslu x_0 existuje práve vtedy, keď existuje $f'_+(x_0)$, $f'_-(x_0)$ a platí $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$. Potom $f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.
2. Ak funkcia f má v číslu x_0 deriváciu, je v číslu x_0 spojitá. Takisto ak má funkcia f v číslu x_0 deriváciu sprava (zľava), je v číslu x_0 spojitá sprava (zľava).
3. Nech funkcie f , g majú na množine M deriváciu. Potom platí:

$$[cf]' = cf', \text{ kde } c \text{ je číslo}$$

$$[f + g]' = f' + g'$$

$$[f - g]' = f' - g'$$

$$[fg]' = f'g + fg'$$

$$\left[\frac{f}{g}\right]' = \frac{f'g - fg'}{g^2}, \text{ kde } g \neq 0$$

Derivácia zloženej funkcie:

Nech $u = g(x)$ je funkcia, ktorá má na množine M deriváciu g' . Nech N je obor funkčných hodnôt parciálnej funkcie f definovanej na množine M . Potom funkcia $y = f(u)$ má na množine M deriváciu a platí

$$[f[g(x)]]' = f'[g(x)]g'(x)$$

Vzťah zapisujeme aj takto: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

Derivácia inverznej funkcie:

Nech f je rýdzo monotónna funkcia na intervale (a,b) a má v tomto intervale deriváciu

$$f' \neq 0. \text{ Potom inverzná funkcia } f^{-1}(x) = \frac{1}{[f'(u)]_{u=f^{-1}(x)}} = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}$$

Derivácie elementárnych funkcií:

Pre každé x z definičného oboru, pokiaľ nie je uvedené iné, platia pre derivácie elementárnych funkcií tieto vzorce:

1. $[c]' = 0$, kde c je číslo

2. $[x]' = 1$
3. $[x^n]' = nx^{n-1}$, kde n je reálne číslo
4. $[e^x]' = e^x$
5. $[a^x]' = a^x \ln a$
6. $[\ln x]' = \frac{1}{x}$
7. $[\ln_a x]' = \frac{1}{x \ln a}$
8. $[\sin x]' = \cos x$
9. $[\cos x]' = -\sin x$
10. $[\operatorname{tg} x]' = \frac{1}{\cos^2 x}$
11. $[\operatorname{cotg} x]' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
12. $[\arcsin x]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, pre $|x| < 1$
13. $[\arccos x]' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, pre $|x| < 1$
14. $[\operatorname{arctg} x]' = \frac{1}{1+x^2}$
15. $[\operatorname{arccotg} x]' = -\frac{1}{1+x^2}$

5.1 L'Hospitalovo pravidlo

Toto pravidlo sa používa pri výpočte limit funkcií typu $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$, ak

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ aj $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, alebo $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = \infty$ a $\lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = \infty$, respektíve pri výpočte limit funkcií, ktoré sa dajú upraviť na tieto typy limit. Teda ide o limity v tvare $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$. Na ich výpočet nemôžeme použiť vetu o limite podielu, pretože podiely $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ nie

sú definované v R . Ide o limity takzvaných neurčitých výrazov.

Nech funkcie f a g spĺňajú nasledujúce podmienky :

1. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, alebo $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = \infty$, $\lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = \infty$
2. existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (vlastná alebo nevlastná) .

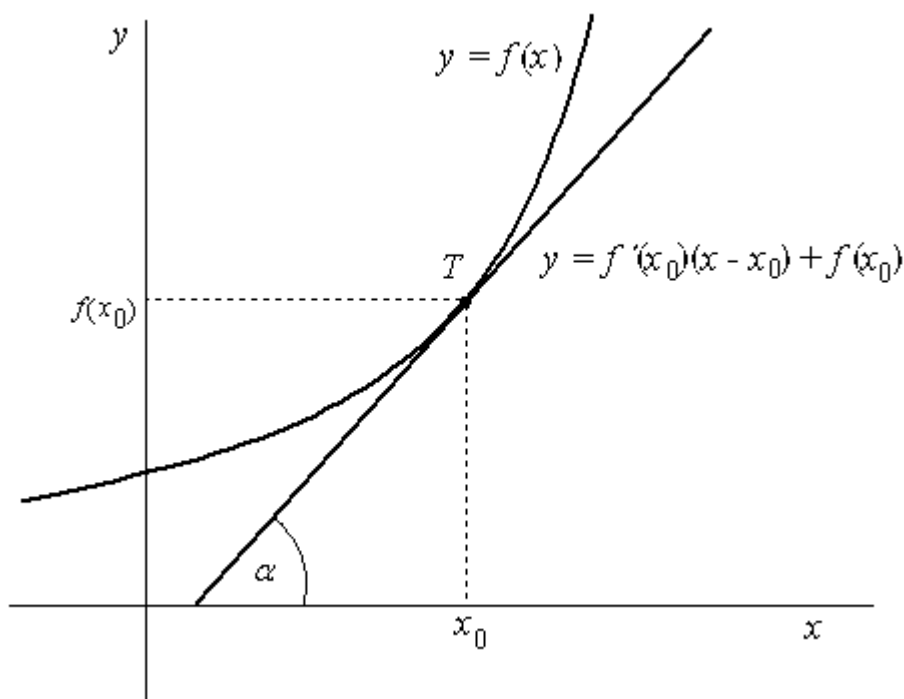
Potom existuje aj $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ a platí $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Princíp L'Hospitalovho pravidla spočíva v tom, že derivovaním čitateľa a menovateľa sa môžeme „zbaviť“ nežiadúcich hodnôt v menovateli (nula, nekonečno).

5.2 Geometrický význam derivácie

S deriváciou sa stretávame v dvoch základných aplikáciách: v matematike - geometrii a vo fyzike. Preto aj jej význam budeme rozoberať z týchto dvoch pohľadov.

Derivácia funkcie $f'(x)$ v čísle x_0 je smernica dotyčnice ku grafu funkcie $y = f(x)$ v bode $T = (x_0, f(x_0))$.



Obrázok 12 Geometrický význam derivácie - smernica dotyčnice grafu funkcie v bode
(zdroj: <http://www.evln.stuba.sk/~velichova/PREDNASKY/Prednaska9.xml>)

Derivácia funkcie v bode x_0 teda vyjadruje spád čiary, ktorá je dotyčnicou ku grafu funkcie v danom bode.

5.3 Fyzikálny význam derivácie

Vo fyzike sa stretujeme najčastejšie s deriváciami pri určovaní okamžitých časových zmien určitých veličín.

Ak funkcia $s = f(t)$ vyjadruje zákon pohybu hmotného bodu M , t. j. udáva veľkosť dráhy, ktorú hmotný bod prejde za daný čas, tak derivácia funkcie f v čase t_0 , $f'(t_0)$ udáva okamžitú rýchlosť hmotného bodu M v čase t_0 .

$$v(t_0) = \frac{ds}{dt} = f'(t_0)$$

5.4 Derivácie vyšších rádov

Nech funkcia $(f')'$ je definovaná na množine M . Deriváciou druhého rádu alebo druhou deriváciou funkcie $y = f(x)$ nazývame funkciu $(f')'$, t. j. deriváciu prvej derivácie funkcie $y = f(x)$. Označujeme ju f'' alebo $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Deriváciou n -tého rádu alebo n -tou deriváciou ($n = 2, 3, 4, \dots$) funkcie $y = f(x)$ nazývame deriváciu $(n - 1)$ -ej derivácie funkcie $y = f(x)$, ak tieto existujú.

Derivácie vyšších rádov môžeme označovať viacerými spôsobmi:

$$f'', f''', f^{(4)}, f^{(5)}, \dots, f^{(n)}$$

$$y'', y''', y^{(4)}, y^{(5)}, \dots, y^{(n)}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \frac{d^4y}{dx^4}, \frac{d^5y}{dx^5}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}$$

Príklad 1:

Vypočítajte limity pomocou L'Hospitalovho pravidla:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-3x+2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{2x-3} = \frac{1}{4-3} = 1$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{1} = \frac{2}{1} = 2$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2-5x+6} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{2x-5} = \frac{1}{6-5} = 1$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-x-2}{x^3-3x^2+2x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-1}{3x^2-6x+2} = \frac{4-1}{12-12+2} = \frac{3}{2}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-5x+4}{x^3-1} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2-5}{3x^2} = \frac{3 \cdot 1^2-5}{3 \cdot 1^2} = -\frac{2}{3}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+x-2}{x^2+2x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x+1}{2x+2} = \frac{2 \cdot (-2)+1}{2 \cdot (-2)+2} = \frac{3}{2}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^4-4x^3+1}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{12x^3-12x^2}{2x-2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{36x^2-24x}{2} = \lim_{x \rightarrow 1} (18x^2-12x) = 6$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-x-2}{x^3+1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-1}{3x^2} = \frac{2(-1)-1}{3(-1)^2} = -1$$

$$i) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x+6}{x^3+8} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{3x^2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

Príklad 2:

Vypočítajte deriváciu funkcie $f(x) = x^3 - x - 13\sqrt{x} + 7$.

Riešenie:

$$f'(x) = (x^3 - x - 13\sqrt{x} + 7)' = 3x^2 - 1 - 13 \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} + 0 = 3x^2 - 1 - \frac{13}{2\sqrt{x}}$$

Príklad 3:

Vypočítajte deriváciu funkcie $f(x) = x^4 \cos x$.

Riešenie:

$$f'(x) = (x^4)' \cos x + x^4 (\cos x)' = 4x^3 \cos x + x^4 (-\sin x) = x^3 (4 \cos x - x \sin x)$$

Príklad 4:

Vypočítajte deriváciu funkcie $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

Riešenie:

$$f'(x) = \frac{(\ln x)' x - (\ln x)(x)'}{x^2} = \frac{\left(\frac{1}{x} x - \ln x \cdot 1\right)}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

Príklad 5:

Derivujte zloženú funkciu $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 12}$.

Riešenie:

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 2x + 12)^{-\frac{1}{2}} \cdot (x^2 - 2x + 12)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 2x + 12}} \cdot (2x - 2) = \frac{2x - 2}{2\sqrt{x^2 - 2x + 12}}$$

Príklady:

1. Vypočítajte deriváciu funkcií:

a) $y = x^{10}$

g) $y = x^{\frac{3}{5}}$

m) $y = 2x^2$

b) $y = 3x^2$

h) $y = \sqrt{x}$

n) $y = \frac{1}{3}x^2$

c) $y = x^{-2}$

i) $y = \sqrt[3]{x}$

o) $y = 3x^5 - 4x^2$

d) $y = -5x^{-6}$

j) $y = \sqrt[4]{x}$

p) $y = 2e^x$

e) $y = x^{\frac{2}{3}}$

k) $y = \sqrt[3]{x^7}$

q) $y = \frac{1}{2}e^x$

f) $y = x^{\frac{4}{3}}$

l) $y = \sqrt[3]{x^{12}}$

r) $y = 2e^x + x^3$

Výsledky:

1.

a) $10x^9$

g) $\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}$

m) $4x$

b) $6x$

h) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

n) $\frac{2}{3}x$

c) $-2x^{-3}$

i) $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

o) $15x^4 - 8x$

d) $30x^{-7}$

j) $\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$

p) $2e^x$

e) $\frac{2}{\sqrt[3]{x}}$

k) $\frac{7}{3}x\sqrt[3]{x}$

q) $\frac{1}{2}e^x$

f) $\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$

l) $4x^3$

r) $2e^x + 3x^2$

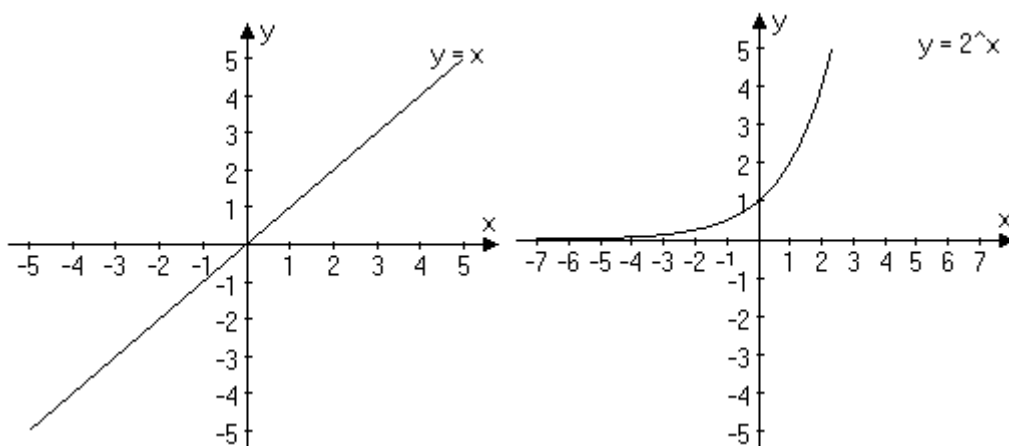
6 PRIEBEH FUNKCIE

Pomocou derivácií môžeme zistiť priebeh funkcie bez toho, aby sme si zostrojili jej graf, resp. počítali funkčné hodnoty niektorých bodov. Zistiť priebeh funkcie v tomto zmysle chápeme tak, že určíme intervaly monotónnosti funkcie, jej extrémny ako aj ďalšie vlastnosti. V nasledujúcich odsekoch si povieme, ako je to možné uskutočniť.

6.1 Monotónnosť a lokálne extrémny

Ak funkcia f je spojitá na uzavretom intervale (a, b) a má kladnú (zápornú) deriváciu v každom bode otvoreného intervalu (a, b) , potom je funkcia f rastúca (klesajúca) na intervale (a, b) . Príklady rastúcich a klesajúcich funkcií sú na obrázkoch 13, 14.

Ak pre každé x z vnútra intervalu (a, b) platí $f'(x) \geq 0, (f'(x) \leq 0)$, funkcia f je na intervale (a, b) neklesajúca (nerastúca).



Obrázok 13 Príklady rastúcich funkcií: $y = x$, $y = 2^x$

(zdroj: <http://sithova.webnode.sk/matematika/funkcie/linearne-funkcie/>)

Príklad 1:

Nájdite intervaly monotónnosti funkcie $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 12$.

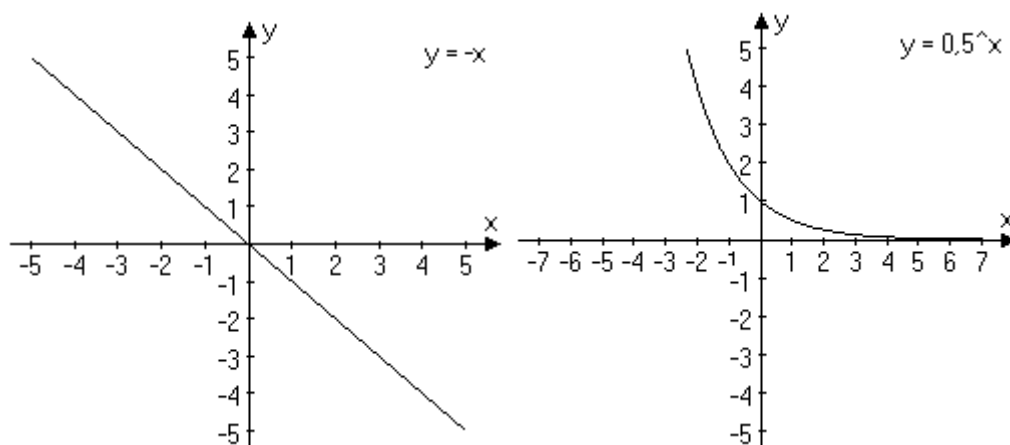
Riešenie:

Daná funkcia má v každom číse deriváciu $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$. Zistíme intervaly najväčšej dĺžky, v ktorých je:

a) $f'(x) > 0$

b) $f'(x) < 0$

- a) $6(x^2 + x - 2) > 0$
 $6(x + 2)(x - 1) > 0$, teda $x \in (-\infty, -2) \cup (1, \infty)$. Na tomto intervale je funkcia rastúca.
 b) $6(x^2 + x - 2) < 0$, teda $x \in (-2, 1)$. Na tomto intervale je funkcia klesajúca.



Obrázok 14 Príklady klesajúcich funkcií: $y = -x$, $y = 0,5^x$
 (Zdroj: <http://sithova.webnode.sk/matematika/funkcie/linearne-funkcie/>)

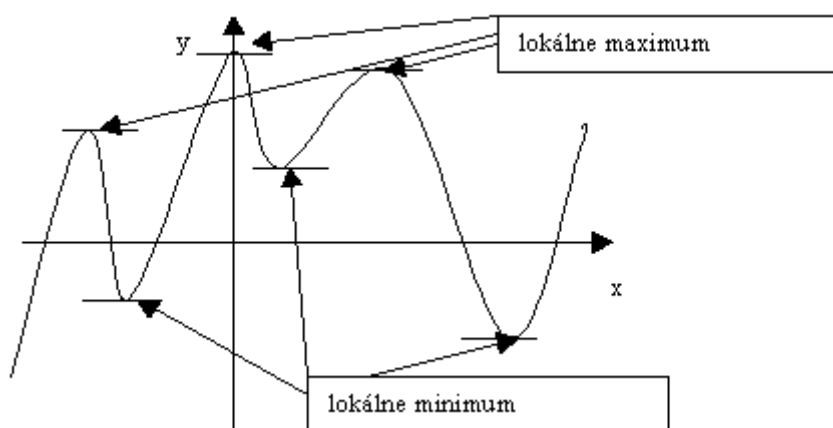
6.2 Maximum a minimum funkcie

V aplikáciách matematiky je často potrebné nájsť najväčšiu alebo najmenšiu hodnotu funkcie a určiť tie čísla z jej definičného oboru, v ktorých tieto hodnoty nadobúda. Ak ide o najväčšiu a najmenšiu hodnotu funkcie na celom jej definičnom obore - hovoríme o globálnych extrémoch, ak ide o najväčšiu, resp. najmenšiu hodnotu v okolí nejakého čísla, hovoríme o lokálnych extrémoch.

Body, v ktorých sa funkcia $f(x)$ mení z klesajúcej na rastúcu resp. z rastúcej na klesajúcu sa nazývajú lokálne extrémy.

Nech funkcia f je definovaná v intervale (a, b) . Hovoríme, že funkcia $f(x)$ má v bode x_0 lokálne maximum (lokálne minimum), ak existuje také okolie bodu x_0 , že pre každý bod x z tohto okolia platí $f(x) \leq f(x_0)$ ($f(x) \geq f(x_0)$)

Ak pre všetky x z okolia bodu x_0 platí $f(x) < f(x_0)$, ($f(x) > f(x_0)$), hovoríme, že funkcia f má v číslach x_0 ostré lokálne maximum (ostré lokálne minimum).



Obrázok 15 Funkcia s troma lokálnymi minimami a troma lokálnymi maximami na intervale (a, b)

(zdroj: http://www.mojeskola.cz/Vyuka/Php/Learning/Derivace/matika_krokom4.php)

Veta (Nutná podmienka lokálneho extrému)

Ak funkcia $f(x)$ má v bode x_0 lokálny extrém a má v tomto bode prvú deriváciu, potom $f'(x) = 0$.

Stacionárnymi bodmi funkcie f nazývame všetky čísla z definičného oboru funkcie f , v ktorých $f'(x) = 0$ alebo f' neexistuje.

Veta (Postačujúca podmienka lokálneho extrému)

Ak $f'(x) = 0$ a zároveň platí jedna z možností: $f''(x) > 0$ alebo $f''(x) < 0$, potom má funkcia $f(x)$ v bode x_0 lokálne minimum (lokálne maximum).

Pri hľadaní lokálnych extrémov postupujeme takto:

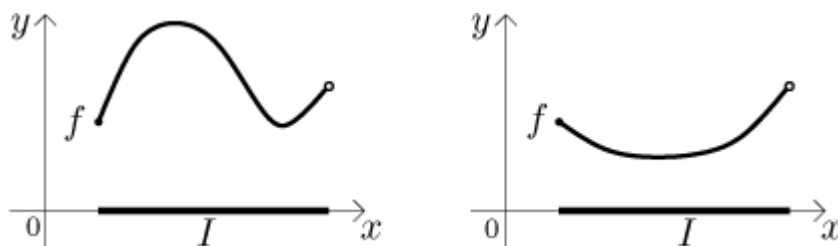
1. Nájďme všetky stacionárne body funkcie f .
2. Použitím nutných a postačujúcich podmienok rozhodneme, či v týchto stacionárnych bodoch má funkcia extrém.
3. Vypočítame hodnotu extrém.

Maximum (minimum) spojitely funkcie f na intervale $\langle a, b \rangle$ hľadáme tak, že nájdeme:

1. lokálne extrém funkcie v intervale (a, b) ,
2. maximum (minimum) z týchto lokálnych maxím (miním) a čísel $f(a)$, $f(b)$.

Ak je interval, na ktorom hľadáme maximum (minimum) otvorený, maximum (minimum) funkcie na intervale nemusí existovať. Ak existuje, je to maximum (minimum) iba

z lokálnych maxím (miním) funkcie f na intervale (a, b) . Na obr. 8 je minimom funkcie na zobrazenom intervale bod x_{11} .



Obrázok 16 Funkcia s (globálnym) maximum - vľavo a (globálnym) minimum – vpravo (zdroj: <http://math.feld.cvut.cz/mt/txtc/4/txc3ca4c.htm>)

Príklad 1:

Nájdite lokálne extrém y = $x^4 - 2x^2$.

Riešenie:

$$y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1) = 4x(x - 1)(x + 1)$$

Prvá derivácia sa rovná nule v bodoch $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$.

$$y'' = 12x^2 - 4$$

$y''(-1) = 8 > 0$ teda funkcia má v bode -1 lokálne minimum

$$y(-1) = 1$$

$y''(0) = -4 < 0$ teda funkcia má v bode 0 lokálne maximum

$$y(0) = 0$$

$y''(1) = 8 > 0$ teda funkcia má v bode 1 lokálne minimum

$$y(1) = -1$$

Funkcia má lokálne maximum v bode $[0, 0]$ a lokálne minimá v bodoch $[-1, 1]$, $[1, -1]$.

6.3 Konvexnosť, konkávnosť, inflexné body

Majme funkciu f , ktorá je definovaná v intervale (a, b) .

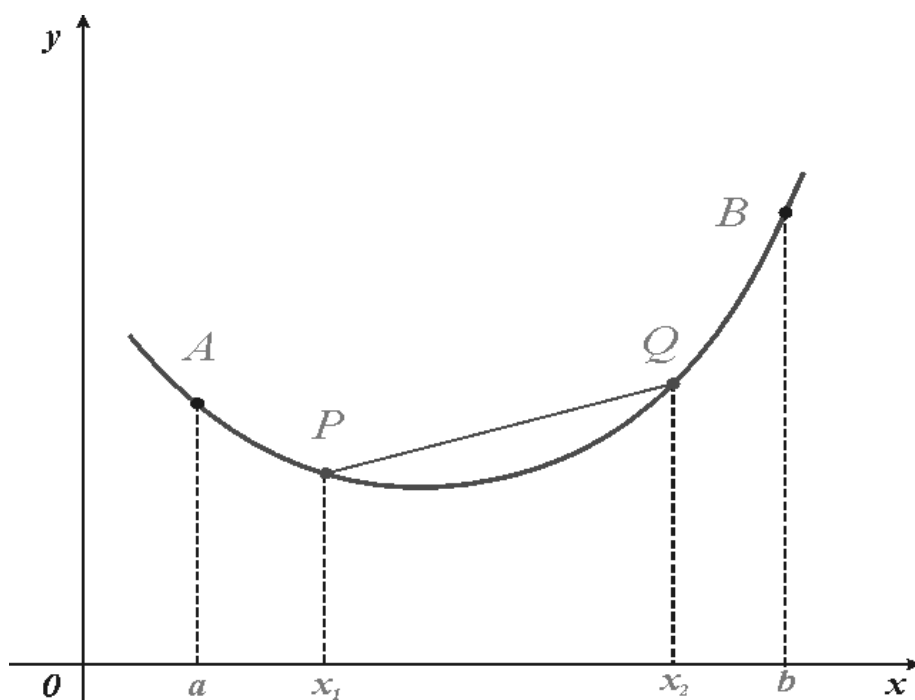
Ak pre každé tri čísla x_1, x_2, x_3 z intervalu (a, b) také, že platí $x_1 < x_2 < x_3$, leží bod $P_2 = (x_2, f(x_2))$ pod priamkou, ktorá prechádza bodmi $P_1 = (x_1, f(x_1))$, $P_3 = (x_3, f(x_3))$ alebo leží na tejto priamke – vtedy hovoríme, že funkcia f je konvexná na intervale (a, b) .

Ak pre každé tri čísla x_1, x_2, x_3 z intervalu (a, b) také, že platí $x_1 < x_2 < x_3$, leží bod $P_2 = (x_2, f(x_2))$ nad priamkou, ktorá prechádza bodmi $P_1 = (x_1, f(x_1))$, $P_3 = (x_3, f(x_3))$ alebo leží na tejto priamke – vtedy hovoríme, že funkcia f je konkávna na intervale (a, b) .

Zjednodušene môžeme definovať konvexnosť a konkávnosť nasledovne:

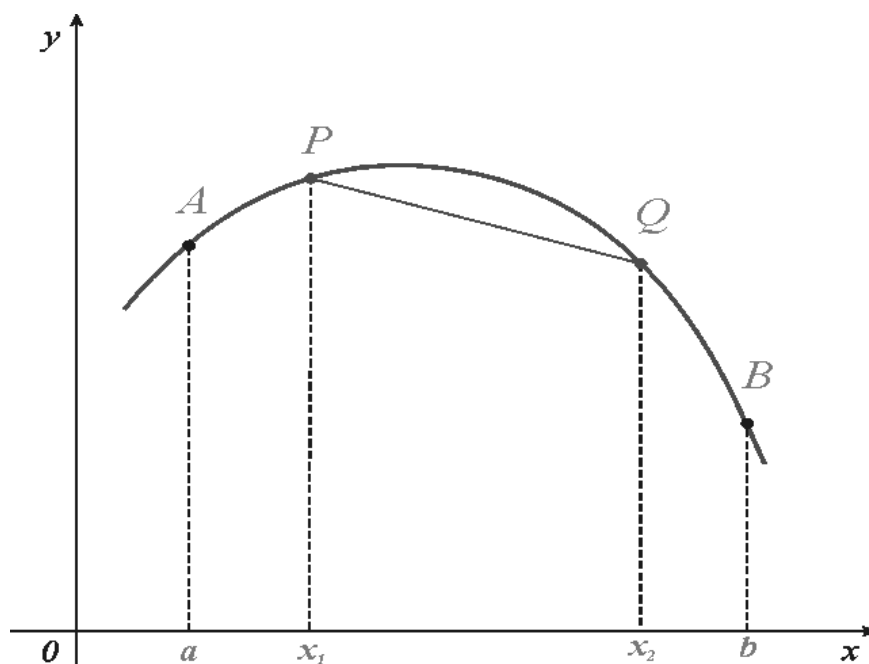
Funkcia je konvexná v intervale (a, b) , ak jej graf je "otvorený nahor" (obr. 17).

Funkcia je konkávna v intervale (a, b) , ak jej graf je "otvorený nadol" (obr. 18).



Obrázok 17 Rýdzo konvexná funkcia

(zdroj: <http://www.karlin.mff.cuni.cz/~trnka/derivace/?page=41uvod>)



Obrázok 18 Rýdzo konkávna funkcia

(zdroj: <http://www.karlin.mff.cuni.cz/~trnka/derivace/?page=41uvod>)

Konvexnosť alebo konkávnosť môžeme určiť pomocou druhej derivácie funkcie.

Nech funkcia f má deriváciu na intervale (a, b) .

Funkcia f je rýdzo konvexná (konvexná) práve vtedy, keď derivácia f' je na intervale (a, b) rastúca (neklesajúca).

Funkcia f je rýdzo konkávna (konkávna) práve vtedy, keď derivácia f' je na intervale (a, b) klesajúca (nerastúca).

Nech funkcia f je spojitá na intervale (a, b) a vnútri intervalu (a, b) má druhú deriváciu f'' .

Funkcia f je na intervale konvexná (konkávna) práve vtedy, keď platí: $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$) pre každé x zvnútra intervalu (a, b) .

Funkcia f je na intervale rýdzo konvexná (rýdzo konkávna) práve vtedy, keď platí: $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$) pre každé x zvnútra intervalu (a, b) a v každom intervale $J \subset (a, b)$ je aspoň jeden bod x , pre ktorý platí $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$).

Príklad 1:

Nájdite intervaly, v ktorých je funkcia $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ konvexná a intervaly, v ktorých je konkávna:

Riešenie:

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x$$

$$y' = 3x^2 - 12x + 9$$

$$y'' = 6x - 12 = 6(x - 2)$$

Druhá derivácia je kladná na intervale $(2, \infty)$ preto funkcia je konvexná na tomto intervale.

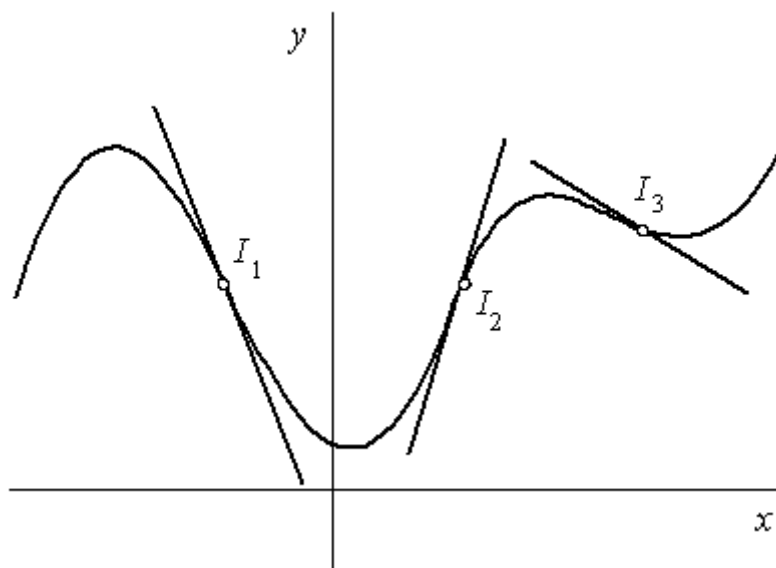
Druhá derivácia je záporná na intervale $(-\infty, 2)$, preto funkcia je na tomto intervale konkávna.

6.4 Inflexný bod funkcie

Nech funkcia f má v čísle x_0 deriváciu $f'(x_0)$. Nech existuje také pravé okolie čísla x_0 , že pre všetky čísla x z tohto okolia bod $P = (x, f(x))$ leží nad (pod) dotyčnicou ku grafu funkcie v čísle x_0 a také ľavé okolie čísla x_0 , že pre všetky čísla x z tohto okolia bod $P = (x, f(x))$ leží nad (pod) dotyčnicou ku grafu funkcie v čísle x_0 . Potom hovoríme, že funkcia f má v čísle x_0 inflexný bod alebo že graf funkcie $y = f(x)$ má v bode $P = (x_0, f(x_0))$ inflexný bod.

Zjednodušene môžeme definovať inflexný bod nasledovne:

Bod, v ktorom sa funkcia mení z konvexnej na konkávnu alebo naopak voláme inflexný bod.



Obrázok 19 Inflexné body funkcie

(zdroj: <http://www.evln.stuba.sk/~velichova/PREDNASKY/Prednaska112.xml>)

Vlastnosti inflexného bodu:

1. Ak funkcia f má v čísle x_0 inflexný bod, potom $f''(x_0) = 0$ alebo $f''(x_0)$ neexistuje.
2. Nech funkcia f má v pravom a ľavom okolí čísla x_0 druhú deriváciu f'' a v čísle x_0 prvú deriváciu $f'(x_0)$. Ak pre všetky x z pravého okolia čísla x_0 platí $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$) a pre všetky x z ľavého okolia čísla x_0 platí $f''(x) < 0$ ($f''(x) > 0$), funkcia f má v čísle x_0 inflexný bod.

Príklad 1:

Nájdite inflexné body funkcie $y = x^4 - 2x^2$.

Riešenie:

$$y' = 4x^3 - 4x$$

$$y'' = 12x^2 - 4 = 4(3x^2 - 1) = 0 \quad \text{práve vtedy, keď } x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$y''' = 24x$$

$$y'''\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \neq 0$$

$$y'''\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \neq 0$$

$$y''\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{5}{9}$$

$$y''\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{5}{9}$$

Inflexné body majú súradnice: $\left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{5}{9}\right], \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{5}{9}\right]$.

Príklad 2:

Nájdite body, ktoré sú inflexnými bodmi funkcie $y = x^3 - 6x^2 + 9x$.

Riešenie:

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x$$

$$y' = 3x^2 - 12x + 9$$

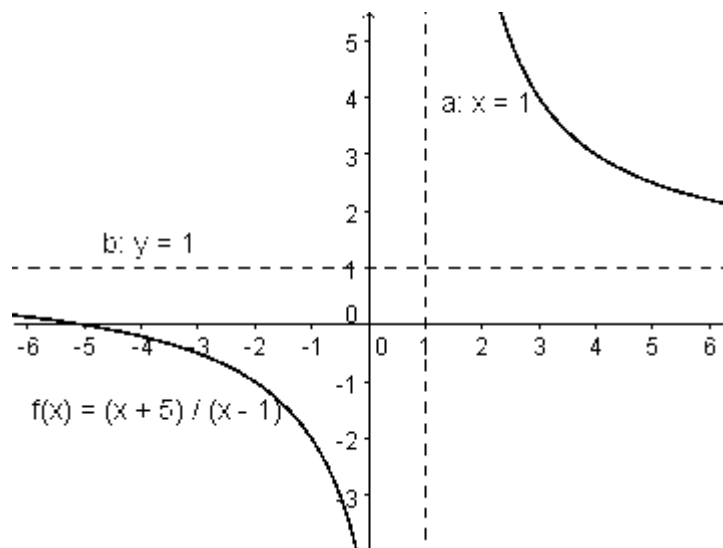
$$y'' = 6x - 12 = 6(x - 2)$$

$$y''' = 6 \text{ pre ľubovoľné číslo } x.$$

Druhá derivácia sa rovná nule pre $x = 2$. Funkčná hodnota $y(2) = 2$. Jediný inflexný bod je $[2, 2]$.

6.5 Asymptoty

Priamku, ktorá má rovnicu $x = a$, nazývame asymptotou bez smernice grafu funkcie f , ak funkcia f má v čísle a nevlastnú limitu alebo nevlastnú limitu zľava alebo nevlastnú limitu sprava.



Obrázok 20 Funkcia s dvomi asymptotami
(zdroj: <http://www.funkce.eu/lomena.php>)

Priamku, ktorá má rovnicu $y = ax + b$, nazývame asymptotou so smernicou grafu funkcie f , ak platí $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ alebo $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$.

Ak existujú limity $a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}, b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax]$ alebo

$a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}, b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax]$, potom priamka $y = ax + b$ je asymptotou so smernicou grafu funkcie f .

Príklad 1:

Nájdite asymptoty bez smernice funkcie $y = \frac{3x}{x-2}$.

Riešenie:

Definičný obor $D = (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$.

Funkcia má v bode $x = 2$ limity:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3x}{x-2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x}{x-2} = -\infty$$

Priamka $x = 2$ je asymptotou bez smernice.

Príklad 2:

Nájdite asymptotu bez smernice funkcie $y = \frac{x^2 - 2}{x - 1}$.

Riešenie:

Definičný obor $D = \mathbb{R} - \{1\}$.

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x - 2} \right) - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 1}{x - 2} = 2$$

Priamka $y = x + 2$ je asymptotou so smernicou grafu funkcie y .

6.6 Priebeh funkcie

Pri určovaní priebehu funkcie najčastejšie zistujeme:

1. Definičný obor.
2. Párnosť, nepárnosť, periódu funkcie.
3. Všetky body nespojitosti funkcie, jednostranné limity funkcie v bodoch nespojitosti, intervaly spojitosti funkcie.
4. Všetky nulové body funkcie.
5. Intervaly, na ktorých je funkcia monotónna.
6. Lokálne extrémny funkcie.
7. Intervaly, na ktorých je funkcia konkávna a konvexná.
8. Inflexné body funkcie.
9. Asymptoty funkcie.
10. Ďalšie vlastnosti: body, v ktorých derivácia funkcie nie je definovaná.

Príklad 1:

Nájdite intervaly, na ktorých je funkcia $y = x^4 - 2x^2$ rastúca a intervaly na ktorých je klesajúca.

Riešenie:

Urobíme prvú deriváciu funkcie:

$$y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1) = 4x(x - 1)(x + 1) > 0$$

Riešením nerovnice dostaneme, že $x \in (-1, 0) \cup (1, \infty)$. Na zjednotení týchto intervalov je funkcia rastúca.

Podobne riešením nerovnice $4x(x - 1)(x + 1) < 0$ dostaneme, že $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$. Na zjednotení týchto intervalov je funkcia klesajúca.

Príklad 2:

Nájdite lokálne extrémny funkcie $y = x^4 - 2x^2$.

Riešenie:

Urobíme prvú deriváciu funkcie a nájdeme stacionárne body funkcie:

$$y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1) = 4x(x - 1)(x + 1) = 0$$

Prvá derivácie funkcie je nulová v bodoch 0, 1, -1.

Urobíme druhú deriváciu funkcie:

$$y'' = 12x^2 - 4$$

Zistíme hodnotu druhej derivácie v stacionárnych bodoch:

$$f''(-1) > 0, f''(0) < 0, f''(1) > 0$$

To znamená, že funkcia má v bode -1 lokálne minimum, v bode 0 lokálne maximum a v bode 1 lokálne minimum. Vypočítame príslušné hodnoty funkcií v bodoch -1, 0, 1 a dostaneme tieto body:

$[-1, -1]$	lokálne minimum
$[0, 0]$	lokálne maximum
$[1, -1]$	lokálne minimum

Príklad 3:

Zistite, na ktorých intervaloch je funkcia $y = x^3 - 27x + 3$ konvexná a konkávna. Nájdite inflexný bod funkcie.

Riešenie:

Vypočítame druhú deriváciu funkcie:

$$y' = 3x^2 - 27$$

$$y'' = 6x$$

Riešením nerovnice $6x > 0$ dostaneme, že $x \in (0, \infty)$. Na tomto intervale je funkcia konvexná.

Podobne riešením nerovnice $6x < 0$ dostaneme, že $x \in (-\infty, 0)$. Na tomto intervale je funkcia konkávna.

Riešením rovnice $6x = 0$ je $x = 0$. Vypočítame funkčnú hodnotu v bode 0 a dostaneme inflexný bod funkcie: $[0, 3]$.

Príklad 4:

Zistite priebeh funkcie $y = \frac{2x^3}{x^2 - 1}$.

Riešenie:

1. Definičný obor funkcie je množina $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$.

2. Počítame
$$y(-x) = \frac{2(-x)^3}{(-x)^2 - 1} = -\frac{2x^3}{x^2 - 1} = -y(x)$$

funkcia je nepárna, nie je periodická.

3. Funkcia je spojitá, jediný nulový bod funkcie je bod 0.

4. Asymptoty grafu funkcie bez smernice sú priamky $x = -1$ a $x = 1$, lebo jednostranné limity v nich sú nevlastné. Počítame asymptoty so smernicou:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = 2$$

$$q = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 2x(x^2 - 1)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x^2 - 1} = 0$$

Vzhľadom na nepárnosť funkcie existuje jediná asymptota jej grafu so smernicou: $y = 2x$.

5. Intervaly monotónnosti funkcie určíme pomocou prvej derivácie

$$y'(x) = \frac{2x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2}$$

Analýza znamienok derivácie vedie k výsledku, že $y' > 0$ pre $x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty)$.

Funkcia je rastúca v intervaloch, $x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty)$

funkcia je klesajúca v intervaloch $(-\sqrt{3}, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \sqrt{3})$.

6. Lokálne extrémny funkcie sú v bodoch, kde sa funkcia mení z rastúcej na klesajúcu alebo naopak. Pretože body 1, -1 nie sú v jej definičnom obore, jediné jej extrémny sú nasledovné:

Funkcia má lokálne maximum $[-\sqrt{3}, -3\sqrt{3}]$.

Funkcia má lokálne minimum $[\sqrt{3}, 3\sqrt{3}]$.

7. Intervaly, kde je funkcia konvexná, konkávna určíme pomocou druhej derivácie

$$y'' = \frac{4x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3}. \text{ Analýza znamienok druhej derivácie vedie k výsledku:}$$

Funkcia je konvexná v intervaloch $(-1, 0) \cup (1, \infty)$,

funkcia je konkávna v intervaloch $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$.

Funkcia mení charakter konvexnosti a konkávnosti v jedinom bode definičného oboru.

8. Funkcia má jediný inflexný bod v bode 0.

Príklady:

1. Zistite intervaly monotónnosti funkcie $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 12$.
2. Zistite intervaly monotónnosti funkcie $y = x^3 - x$.
3. Zistite lokálne extrémny funkcie $y = x^3 - 6x^2$.
4. Zistite lokálne extrémny funkcie $y = x^3 - 12x - 6$.
5. Zistite intervaly, na ktorých je funkcia $y = 5x^2 + 20x + 7$ konvexná, konkávna. Nájdite inflexný bod funkcie.

6. Zistite intervaly, na ktorých je funkcia $y = x^3 - 2x^2 + x$ konvexná, konkávna. Nájdite inflexný bod funkcie.
7. Zistite priebeh funkcie $y = x^4 - 2x + 1$.
8. Zistite priebeh funkcie $y = x^2 - 6x + 10$.
9. Zistite priebeh funkcie $y = -x^3 + 3x$.

Výsledky:

1.

$(-2, 1)$ klesajúca funkcia

$(-\infty, -2) \cup (1, \infty)$ rastúca funkcia

2.

$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ klesajúca

$\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty\right)$ rastúca

3.

Lokálne maximum $[0, -6]$

Lokálne minimum $[4, -32]$

4.

Lokálne maximum $[-2, 10]$

Lokálne minimum $[2, -22]$

5.

Funkcia je konvexná na $\mathbb{R}$. Nemá inflexný bod.

6.

$\left(\frac{2}{3}, \infty\right)$ konvexná

$\left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$ konkávna

Inflexný bod $\left[\frac{2}{3}, \frac{2}{27}\right]$.

7.

Definičným oborom je $\mathbb{R}$.

$x \in (-1, 0) \cup (1, \infty)$ rastúca

$x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$ klesajúca

$[-1, 0]$ lokálne minimum

$[1, 0]$ lokálne minimum

$[0, 1]$ lokálne maximum

$\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty\right)$ konvexná

$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ konkávna

Inflexné body: $\left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{4}{9}\right], \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{4}{9}\right]$

8.

Definičným oborom je $\mathbb{R}$.

$(3, \infty)$ rastúca

$(-\infty, 3)$ klesajúca

$[3, 2]$ lokálne minimum

Konvexná na $\mathbb{R}$

Nemá inflexný bod.

9.

Definičným oborom je $\mathbb{R}$.

$(-\infty, 1), (1, \infty)$ klesajúca

$(-1, 1)$ rastúca

$[1, -2]$ lokálne minimum

$[1, 2]$ lokálne maximum

$(-\infty, 0)$ konvexná

$(0, \infty)$ konkávna

$[0, 0]$ inflexný bod

7 INTEGRÁL FUNKCIE

Keď hovoríme o integráloch, môžeme mať na mysli dva typy: neurčitý integrál a určitý integrál. Nakoľko určitý integrál vychádza z neurčitého, zdefinujeme najprv neurčitý integrál.

Neurčitý integrál predstavuje opačnú operáciu k derivácii - antideriváciu. Podobne ako je k operácii sčítanie opačnou operáciou odčítanie, k umocňovaniu odmocňovanie, tak je integrovanie funkcií opačnou funkciou k derivácii funkcie. Pod antideriváciou (primitívnou funkciou) rozumieme toto: Funkcia F je antideriváciou k funkcii f , ak funkcia f je deriváciou funkcie F .

7.1 Neurčitý integrál

Funkcia $F(x)$ je v intervale reálnych čísel (a, b) primitívna funkcia k $f(x)$, ak pre všetky x z tohto intervalu platí: $F'(x) = f(x)$.

Ku každej funkcii $f(x)$ spojitej v intervale (a, b) existuje nekonečne mnoho primitívnych funkcií. Nekonečne veľa preto, lebo derivácia konštanty sa rovná nule. Množinu všetkých primitívnych funkcií funkcie f nazývame neurčitým integrálom a označujeme $\int f(x)dx$. Ak $F(x)$ je jedna z nich tak platí:

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

Symbol $\int f(x)dx$ sa nazýva neurčitý integrál funkcie $f(x)$.

Ak k funkciám f a g existujú primitívne funkcie, tak platí:

$$\begin{aligned}\int [f(x) \pm g(x)]dx &= \int f(x)dx \pm \int g(x)dx \\ \int [cf(x)]dx &= c \int f(x)dx, \text{ kde } c \neq 0 \text{ je číslo.}\end{aligned}$$

Ak k funkciám $f_1, f_2, \dots, f_n$ existujú primitívne funkcie a $c_1, c_2, \dots, c_n$ sú čísla, z ktorých aspoň jedno je rôzne od nuly, platí:

$$\int [c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x)]dx = c_1 \int f_1(x)dx + c_2 \int f_2(x)dx + \dots + c_n \int f_n(x)dx$$

Tieto pravidlá používame pri výpočtoch integrálov, ktoré vznikajú súčtom (rozdielom) funkcií alebo násobením funkcie konštantou. K tomu potrebujeme vedieť ako vypočítame jednoduché integrály.

Pravidlá pre výpočet jednoduchých integrálov:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

$$\int \frac{dx}{x-k} = \ln|x-k| + C,$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{cotg} x + c$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + c$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$$

Príklad 1:

Vypočítajte neurčitý integrál $\int (3x^2 + 2x - 4) dx$.

Riešenie:

Z vlastností neurčitého integrálu a pomocou pravidiel pre jednoduché integrály dostaneme:

$$\int (3x^2 + 2x - 4) dx = 3 \int x^2 dx + 2 \int x dx - 4 \int dx = 3 \frac{x^3}{3} + 2 \frac{x^2}{2} - 4x + c = x^3 + x^2 - 4x + c$$

Príklad 2:

Vypočítajte $\int \left(3x^2 - 2x + \frac{1}{\sqrt{x^3}} \right) dx$.

Riešenie:

$$\int \left(3x^2 - 2x + \frac{1}{\sqrt{x^3}} \right) dx = 3 \int x^2 dx - 2 \int x dx + \int x^{-\frac{3}{2}} dx = 3 \frac{x^3}{3} - 2 \frac{x^2}{2} + \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + c = x^3 - x^2 - \frac{2}{\sqrt{x}} + c$$

Príklad 3:

Vypočítajte $\int \frac{2dx}{x+3}$.

Riešenie:

$$\int \frac{2dx}{x+3} = 2 \ln |x+3| + c$$

Príklad 4:

Vypočítajte $\int \frac{5dx}{3x+2}$.

Riešenie:

$$\int \frac{5dx}{3x+2} = \frac{5}{3} \ln |3x+2| + c$$

7.1.1 Substitučná metóda

Niektoré neurčité integrály nevieme vypočítať pomocou predchádzajúcich pravidiel. Preto je potrebné uplatniť pri ich výpočte niektorú zo špeciálnych metód určených na výpočet integrálov. Jednou z nich je substitučná metóda.

Nech funkcia $f(x)$ je definovaná na intervale (a, b) a funkcia $\varphi(t)$ na intervale (α, β) . Nech množina hodnôt funkcie $\varphi(t)$, $t \in (\alpha, \beta)$ je podmnožinou intervalu (a, b) . Nech ďalej $\varphi(t)$ je diferencovateľná na (α, β) . Ak $f(x)$ má na (a, b) primitívnu funkciu $F(x)$, potom $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ má na intervale (α, β) primitívnu funkciu $F[\varphi(t)]$, t.j. $\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F[\varphi(t)] + c$.

Tvrdenie tejto vety budeme používať v pozmenenom tvare. Z rovnosti $\int f(x)dx = F(x) + c$ pre $x = \varphi(t)$ dostávame $\int f(x)dx = F(\varphi(t)) + c$ a platí $\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = \int f(x)dx$.

Integrovaná funkcia má tieto vlastnosti:

1. Je súčinom dvoch funkcií $f[\varphi(t)]$ a $\varphi'(t)$

2. Prvá z nich je zloženou funkciou s hlavnou zložkou f a vedľajšou zložkou φ .
Druhá z nich je deriváciou vedľajšej zložky φ .

Pri integrovaní substitučnou metódou zvyčajne postupujeme takto:

Ak máme vypočítať $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx$ použijeme substitúciu $\varphi(x)=t$, $\varphi'(x)dx=dt$ a dostaneme $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int f(t)dt = F(t)+c = F[\varphi(x)]+c$.

Pri použití tejto metódy integrál $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx$ upravíme na integrál $\int f(t)dt$ tak, že integračnú premennú x nahradíme novou premennou $t = \varphi(x)$. Je zrejmé, že tento postup má zmysel použiť len vtedy, ak vieme vypočítať integrál $\int f(t)dt$.

Ak naopak máme vypočítať $\int f[t]dt$, pričom vieme vypočítať $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx$, môžeme tiež použiť substitučnú metódu. Pre tento prípad uvedieme novú vetu, ktorá je však bezprostredným dôsledkom vety predchádzajúcej.

Nech funkcia $x=\varphi(t)$ má na intervale (α, β) deriváciu $\varphi'(t) \neq 0$ a nech funkcia $t=\varphi^{-1}(x)$, definovaná na intervale (a, b) je inverzná funkcia k funkcii $x=\varphi(t)$ na intervale (α, β) . Nech je funkcia $f(x)$ definovaná na intervale (a, b) . Nech $G(t)$ je primitívna funkcia k funkcii $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ na intervale (α, β) . Potom je funkcia $G(\varphi^{-1}(x))$ primitívna funkcia k funkcii $f(x)$ na intervale (a, b) .

Tvrdenie tejto vety môžeme zapísať nasledovne

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt \text{ pre } x = \varphi(t).$$

Príklad 1:

Vypočítajte $\int (4x-2)^{13} dx$

Riešenie:

$$\int (4x-2)^{13} dx = \left| \begin{array}{l} 4x-2=t \\ 4dx=dt \\ dx=\frac{dt}{4} \end{array} \right| = \int t^{13} \frac{dt}{4} = \frac{1}{4} \int t^{13} dt = \frac{1}{4} \frac{t^{14}}{14} + c = \frac{1}{56} (4x-2)^{14} + c$$

Príklad 2:

Vypočítajte $\int \sqrt{4-x^2} dx$

Riešenie:

$$\int \sqrt{4-x^2} dx = \left| \begin{array}{l} x = 2\sin t \\ dx = 2\cos t dt \end{array} \right| = \int \sqrt{4-4\sin^2 t} 2\cos t dt = 4 \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt =$$

$$= 4 \int \cos^2 t dt = 2 \int (1 + \cos 2t) dt = 2t + \sin 2t + c = 2\arcsin \frac{x}{2} + \sin 2\arcsin \frac{x}{2} + c$$

Príklad 3:

Vypočítajte $\int \frac{\arctg^2 x}{1+x^2} dx$

Riešenie:

$$\int \frac{\arctg^2 x}{1+x^2} dx = \left| \begin{array}{l} \arctg x = t \\ \frac{1}{1+x^2} dx = dt \end{array} \right| = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + c = \frac{\arctg^3 x}{3} + c$$

Príklad 4:

Vypočítajte

$$\int \sin x \cos x dx$$

Riešenie:

$$\int \sin x \cos x dx = \left[\begin{array}{l} \sin x = u \\ \cos x dx = du \end{array} \right] = \int u du = \frac{u^2}{2} + c = \frac{1}{2} \sin^2 x + c$$

7.1.2 Metóda per partes

Metódu per partes (t.j. integrovanie po častiach) používame najmä na integrovanie súčinu dvoch funkcií.

Nech funkcie $f(x)$ a $g(x)$ majú na intervale (a,b) derivácie $f'(x)$ a $g'(x)$. Nech $H(x)$ je primitívna funkcia k funkcii $f'(x)g(x)$ na intervale (a,b) . Potom je funkcia $f(x)g(x) - H(x)$ primitívnou funkciou k funkcii $f(x)g'(x)$ na intervale (a,b) .

Tvrdenie tejto vety môžeme zapísať v tvare $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$.

Aby bol výpočet prehľadnejší, zvykneme požívať tento symbolický zápis $\int uv' dx = uv - \int u'v dx$, kde u, v sú funkcie premennej x .

Úspech použitia metódy závisí od toho, ako si zvolíme funkcie u a v' . Nie každá voľba týchto funkcií vedie k cieľu. Keď je to potrebné, môžeme metódu per partes viackrát zopakovať.

Príklad 1:

Vypočítajte $\int x \sin x dx$

Riešenie:

$$\int x \sin x dx = \left| \begin{array}{l} u = x \Rightarrow u' = 1 \\ v' = \sin x \Rightarrow v = -\cos x \end{array} \right| = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + c$$

Príklad 2:

Vypočítajte $\int x \ln x dx$

Riešenie:

$$\int x \ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x \Rightarrow u' = \frac{1}{x} \\ v' = x \Rightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2x} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + c$$

Príklad 3:

Vypočítajte $\int x \cos x dx$.

Riešenie:

$$\int x \cos x dx = \left[\begin{array}{ll} u=x & u'=1 \\ v'=\cos x & v=\sin x \end{array} \right] = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + c$$

Príklad 4:

Vypočítajte $\int x^2 \sin x dx$.

Riešenie:

$$\int x^2 \sin x dx = \left[\begin{array}{ll} u=x^2 & u'=2x \\ v'=\sin x & v=-\cos x \end{array} \right] = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x dx = \dots \text{ znovu sa použije}$$

metóda per partes, viď predchádzajúci príklad...

Príklady:

1. Vypočítajte neurčité integrály:

- | | |
|--------------------------------|------------------------------|
| a) $\int (3x^2 - 2x) dx$ | d) $\int (3 \cos x - x) dx$ |
| b) $\int (x^2 - x) dx$ | e) $\int x^{\frac{1}{5}} dx$ |
| c) $\int (5x^9 - 5 \sin x) dx$ | f) $\int (x^2 + 1) dx$ |

2. Vypočítajte neurčité integrály:

- a) $\int \frac{3x-1}{\sqrt{x}} dx$

b) $\int (6x^5 - 2x^3 + 11x^2 + 3)dx$

c) $\int \frac{3x^2 + 4x + 2}{5x} dx$

3. Vypočítajte neurčité integrály:

a) $\int \left(\frac{1}{3x^2} - \frac{1}{5x} \right) dx$

c) $\int x^2(x^2 - 2x + 2)dx$

b) $\int \left(\sqrt{x^3} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$

d) $\int x(x-2)(x-3)dx$

4. Vypočítajte neurčité integrály:

a) $\int (3 + 2x)^2 dx$

d) $\int \sqrt[3]{5-6x} dx$

b) $\int (3x + 4)^5 dx$

e) $\int e^{2x} dx$

c) $\int \sin(x+5)dx$

f) $\int e^{-3x} dx$

5. Vypočítajte neurčité integrály metódou per partes:

a) $\int x e^x dx$

d) $\int x \cos x dx$

b) $\int x^3 e^x dx$

e) $\int x^2 \sin x dx$

c) $\int \frac{x}{e^x} dx$

f) $\int x^3 \sin x dx$

6. Vypočítajte substitúciou:

a) $\int \sin(5x+3)dx$

b) $\int \frac{dx}{(x-2)^3}$

c) $\int x e^{x^2} dx$

Výsledky:

1.

a) $x^3 - x^2 + c$

d) $3 \sin x - \frac{x^2}{2} + c$

b) $\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + c$

e) $\frac{5\sqrt{x^6}}{6} + c$

c) $\frac{x^{10}}{5} + 5 \cos x + c$

f) $\frac{x^3}{3} + x + c$

2.

a) $2(\sqrt{x^3} - \sqrt{x}) + c$

$$\text{b)} \quad x^6 - \frac{x^4}{2} + \frac{11}{3}x^3 + 3x + c$$

$$\text{c)} \quad \frac{3}{10}x^2 + \frac{4}{5}x + \frac{2}{5}\ln|x| + c$$

3.

$$\text{a)} \quad -\frac{1}{3x} - \frac{1}{5}\ln|x| + c$$

$$\text{c)} \quad \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + \frac{2x^3}{3} + c$$

$$\text{b)} \quad 2\frac{\sqrt{x^5}}{5} - 2\sqrt{x} + c$$

$$\text{d)} \quad \frac{x^4}{4} - \frac{5x^3}{3} + 3x^2 + c$$

4.

$$\text{a)} \quad \frac{1}{6}(3+2x)^3 + c$$

$$\text{d)} \quad -\frac{1}{8}\sqrt[3]{(5-6x)^4} + c$$

$$\text{b)} \quad \frac{(3x+4)^6}{6} + c$$

$$\text{e)} \quad \frac{1}{2}e^{2x} + c$$

$$\text{c)} \quad -\cos(x+5) + c$$

$$\text{f)} \quad -\frac{1}{3}e^{-3x} + c$$

5.

$$\text{a)} \quad e^x(x-1) + c$$

$$\text{d)} \quad x\sin x + \cos x + c$$

$$\text{b)} \quad x^3e^x - 3x^2e^x + 6xe^x - 6e^x + c$$

$$\text{e)} \quad -x^2\cos x + 2(x\sin x + \cos x) + c$$

$$\text{c)} \quad -\frac{x^2 + 2x + 2}{e^x} + c$$

$$\text{f)} \quad (3x^2 - 6)\sin x - (x^3 - 6x)\cos x + c$$

6.

$$\text{a)} \quad -\frac{1}{5}\cos(5x+3) + c$$

$$\text{b)} \quad -\frac{1}{2(x-2)^2} + c$$

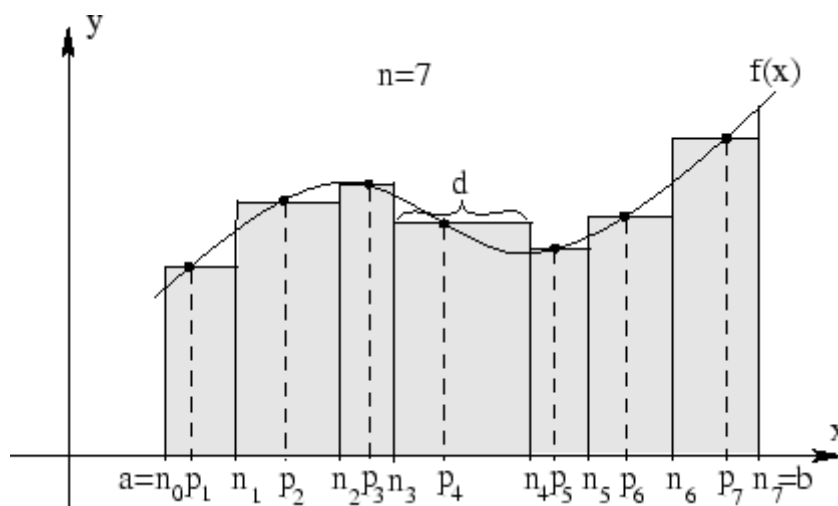
$$\text{c)} \quad \frac{1}{2}e^{x^2} + c$$

7.2 Určitý integrál

Určité integrály používame často na výpočet obsahov a objemov. Predstavme si, že v intervale $\langle a, b \rangle$ je definovaná nezáporná spojitá funkcia f a potrebujeme vypočítať obsah

plochy ohraničenej grafom funkcie f , osou x a priamkami $x = a$ a $x = b$. Môžeme si to predstaviť ako plochu koberca, ktorého obsah potrebujeme vypočítať.

Pokiaľ je f lineárna alebo konštantná, jedná sa o lichobežník, prípadne obdĺžnik a riešenie úlohy je jednoduché. Pre všeobecnú funkciu môžeme postupovať nasledovne:



Obrázok 21 Postup výpočtu obsahu plochy
(zdroj: <http://www.math.sk/skripta2/node36.html>)

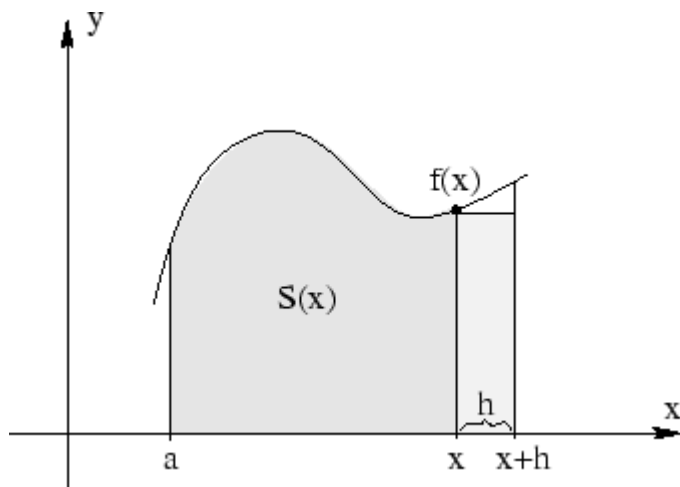
1. Rozdelíme bodmi $a = n_0 < n_1 < n_2 < \dots < n_{n-1} < n_n = b$ interval $\langle a, b \rangle$ na n podintervalov $\langle n_{i-1}, n_i \rangle$. Označme d dĺžku najdlhšieho z nich.
2. V každom podintervale zvolíme niektorý bod p_i .
3. V každom podintervale nahradíme príslušnú časť plochy obdĺžnikom so základňou dĺžky $n_{i-1} - n_i$ a výškou $f(p_i)$.
4. Sčítame obsahy všetkých takýchto obdĺžnikov.

$$S = \sum_{i=1}^n f(p_i)(n_i - n_{i-1})$$

Dostávame tak aproximáciu (približnú hodnotu) hľadaného obsahu. Z obrázku je vidieť, že ak zhustíme deliace body, hodnota S sa viac priblíži skutočnej hodnote. Preto celý postup opakujeme tak, že dĺžka d najdlhšieho podintervalu sa bude blížiť k nule. Takto limitnou hodnotou aproximácie S bude hľadaný obsah.

Tento teoretický postup je však pre všeobecnú funkciu f prakticky neuskutočniteľný. Preto hľadáme iný spôsob, ako nájsť hľadaný obsah. Označme $S(x)$ obsah plochy pod grafom funkcie f v intervale $\langle a, x \rangle$. Všimnime si zmenu $S(x + h) - S(x)$ pre číslo h blízke k nule.

Táto sa približne rovná obsahu obdĺžnika so stranami dĺžok h a $f(x)$, teda $S(x + h) - S(x) \approx hf(x)$.



Obrázok 22 $S'(x) = f(x)$
(zdroj: <http://www.math.sk/skripta2/node36.html>)

$$\text{Preto } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(x+h) - S(x)}{h} = f(x)$$

Výraz na ľavej strane je derivácia funkcie S v bode x , takže dostávame $S'(x) = f(x)$, z čoho vyplýva, že S je tá primitívna funkcia k funkcii f v intervale $\langle a, b \rangle$, pre ktorú platí $S(a) = 0$ (v bode a sa jedná o "plochu" s nulovým obsahom). Preto hľadaný obsah sa rovná rozdielu $S(b) - S(a)$.

V predchádzajúcich riadkoch je približne opísaný proces integrácie spojitej funkcie f v intervale $\langle a, b \rangle$ a motivuje nasledujúci pojem určitého integrálu.

Nech f je spojitá funkcia v intervale $\langle a, b \rangle$ a F je funkcia primitívna k f v intervale $\langle a, b \rangle$.

Určitý integrál funkcie f v intervale $\langle a, b \rangle$ je číslo $F(b) - F(a)$. Zapisujeme nasledovne:

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Uvedený vzťah sa volá Newtonova - Leibnizova formula. Pri samotnom výpočte postupujeme tak, že najskôr nájdeme niektorú primitívnu funkciu F k funkcii f (označenie výrazom v strede) a potom dosadíme krajné body intervalu a odčítame (výraz na pravej strane).

Vlastnosti určitého integrálu

Nech funkcie f, g sú integrovateľné v intervale $\langle a, b \rangle$ a c je číslo. Potom funkcie $|f|$, cf , $f + g$, $f - g$, fg sú integrovateľné v intervale $\langle a, b \rangle$ a platí:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) dx \right| &\leq \int_a^b |f(x)| dx \\ \int_a^b cf(x) dx &= c \int_a^b f(x) dx \\ \int_a^b [f(x) + g(x)] dx &= \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \\ \int_a^b [f(x) - g(x)] dx &= \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx \end{aligned}$$

Príklad 1:

Vypočítajte určitý integrál $\int_1^2 x^6 dx$.

Riešenie:

Pretože funkcia $f(x) = x^6$ je spojitá a teda integrovateľná na $\mathbb{R}$, má primitívnu funkciu

$F(x) = \frac{x^7}{7}$, platí:

$$\int_1^2 x^6 dx = \left[\frac{x^7}{7} \right]_1^2 = \frac{2^7}{7} - \frac{1^7}{7} = \frac{128}{7} - \frac{1}{7} = \frac{127}{7}$$

Príklad 2:

Vypočítajte určitý integrál: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$

Riešenie:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \left[\sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$$

Príklad 3:

Vypočítajte určitý integrál $\int_1^4 \frac{dx}{x^2}$.

Riešenie:

$$\int_1^4 \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^4 = -\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{1} \right) = \frac{3}{4}$$

Príklad 4:

Vypočítajte určitý integrál $\int_{-1}^3 (x^3 - 3x^2 + 1) dx$

Riešenie:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^3 (x^3 - 3x^2 + 1) dx &= \left[\frac{x^4}{4} - 3\frac{x^3}{3} + x \right]_{-1}^3 = \\ &= \left(\frac{3^4}{4} - 3^3 + 3 \right) - \left(\frac{(-1)^4}{4} - (-1)^3 - 1 \right) = \frac{81}{4} - 27 + 3 - \frac{1}{4} - 1 + 1 = 20 + (-24) = -4 \end{aligned}$$

Príklad 5:

Vypočítajte určitý integrál $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \sin x dx$

Riešenie :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \sin x dx = \left[-x \cdot \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \left[-x \cdot \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

metóda PP

$$u = x, v' = \sin x$$

$$u' = 1, v = -\cos x$$

Príklad 6:

Vypočítajte určitý integrál $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx$

Riešenie :

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x dx}{\sqrt{4-x^2}} = \left| \begin{array}{l} \text{substitúcia:} \\ u = 4 - x^2 \\ du = -2x dx \\ x dx = -\frac{du}{2} \end{array} \right. , \quad \begin{array}{l} x = 0 \rightarrow u = 4 \\ x = \sqrt{3} \rightarrow u = 1 \end{array} \left| = \frac{1}{2} \int_1^4 u^{-\frac{1}{2}} du = \left[\sqrt{u} \right]_1^4 = 1$$

Príklad 7:

Vypočítajte určitý integrál $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

Riešenie :

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \left| \begin{array}{l} \text{subst } x=2\sin t, \quad 2\sin t=0, \quad 2\sin t=1 \\ dx=2\cos t dt, \quad t_1=0, \quad t_2=\frac{\pi}{6} \end{array} \right| =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{2\cos t dt}{\sqrt{4-4\sin^2 t}} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos t dt}{\sqrt{1-\sin^2 t}} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} dt = [t]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{6}$$

Príklady:

1. Vypočítajte určité integrály:

a) $\int_{-1}^1 3x^2 dx$

d) $\int_{-3}^2 dx$

b) $\int_1^2 4x^3 dx$

e) $\int_0^3 \sqrt{x} dx$

c) $\int_0^4 -3x dx$

f) $\int_1^{10} \frac{dx}{2\sqrt{x}}$

2. Vypočítajte určité integrály:

a) $\int_1^3 (6x^2 - 5) dx$

d) $\int_0^1 (x^2 + 1) dx$

b) $\int_0^3 (x^2 + x) dx$

e) $\int_0^2 e^x dx$

c) $\int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x} \right) dx$

f) $\int_0^2 (e^x + x) dx$

3. Vypočítajte:

a) $\int_1^3 x^3 dx$

b) $\int_2^3 \frac{dx}{x^2}$

c) $\int_0^a (x^2 - ax) dx$

d) $\int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^4} \right) dx$

e) $\int_1^4 \sqrt{x} dx$

Výsledky:

1.

a) 2

b) 15

c) -12

2.

a) 42

b) 13,5

c) $\frac{7}{3} + \ln 2$

3.

a) 20

b) $\frac{1}{6}$

c) $-\frac{a^3}{6}$

d) $\frac{21}{8}$

e) $\frac{14}{3}$

d) 5

e) $\frac{2}{3}\sqrt{27}$

f) $\sqrt{10} - 1$

d) $\frac{4}{3}$

e) $e^2 - 1$

f) $e^2 + 1$

ZOZNAM BIBIOGRAFICKÝCH ODKAZOV

1. *Aplikovaná matematika*. Dostupné na internete:
http://www.fem.uniag.sk/km/aplikovana_matematika
2. DĚMIDOVÍČ, B. D.: *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy*. Havlíčkův Brod: Fragment, 2003. - 460 s. - ISBN 80-7200-587-1
3. *Derivace*. Dostupné na internete:
<http://www.karlin.mff.cuni.cz/~trnka/derivace/?page=41uvod>
4. *Derivácia funkcie*. Dostupné na internete:
<http://www.evln.stuba.sk/~velichova/PREDNASKY/Prednaska9.xml>
5. *Easy mat*. Dostupné na internete: <http://easymat.wz.cz/grov.html>
6. ELIAŠ, J. – HORVÁTH, J. – KAJAN, J.: *Zbierka úloh z vyššej matematiky*. 1. časť. Bratislava: Alfa, 1968.
7. ELIAŠ, J. – HORVÁTH, J. – KAJAN, J.: *Zbierka úloh z vyššej matematiky*. 2. časť. Bratislava: Alfa, 1969.
8. ELIAŠ, J. – HORVÁTH, J. – KAJAN, J.: *Zbierka úloh z vyššej matematiky*. 3. časť. Bratislava: Alfa, 1967
9. FECENKO, J.: *Matematika 2*. Bratislava : Iura Edition, 2004. 272 s. ISBN 80-89047-73-4
10. *Funkcie*. Dostupné na: <http://www.funkcie.szm.com>
11. *Globální extrémy a optimalizace*. Dostupné na internete:
<http://math.feld.cvut.cz/mt/txtc/4/txc3ca4c.htm>
12. *Interactive mathematics*. Dostupné na internete:
<http://www.intmath.com/trigonometric-graphs/4-graphs-tangent-cotangent-secant-cosecant.php>
13. KMEŤ, F.: *Matematika 2*. Nitra : Slovenská poľnohospodárska univerzita, 2002. 114 s. ISBN 80-8069-057-X
14. *Limita funkcie*. Dostupné na internete:
<http://www.evln.stuba.sk/~velichova/PREDNASKY/Prednaska7.xml>

15. *Limita, derivace a integrál*. Dostupné na internete:
http://www.mojeskola.cz/Vyuka/Php/Learning/Derivace/matika_krokem4.php
16. *Lineárna funkcia*. Dostupné na internete:
<http://sithova.webnode.sk/matematika/funkcie/linearne-funkcie/>
17. MACH, V.: *Základy vysokoškolské matematiky pro beznadějně případy*. Brno: 2005.
Dostupné na internete:
<http://www.umat.feec.vutbr.cz/~krupkova/zaklady%20pro%20beznadejne%20pripady.pdf>
18. *Matematika I*. Dostupné na internete:
http://www.evln.stuba.sk/~velichova/KNIHA/Kapitola4/Cast4_1.xml
19. *Matematika pro střední školy*. Dostupné na internete:
<http://www.funkce.eu/lomena.php>
20. *Matematika*. Dostupné na internete: <http://www.math.sk/skripta/node1.html>
21. *Matematika*. Dostupné na internete: <http://www.math.sk/skripta2/index.html>
22. *Maturita 2012*. Dostupné na internete:
http://www.gymmoldava.sk/ICV/CELYWEB/maturita/mat2012_6903.htm
23. *Niektoré vlastnosti funkcií*. Dostupné na internete:
http://slovak.evln.stuba.sk/elearning/elearning_files/vlastnfunkcii.xml
24. *O škole*. Dostupné na internete: http://www.oskole.sk/?id_cat=2&clanok=16535
25. OLEJÁR, M. – OLEJÁROVÁ, I.: *Derivácie*. I. diel. Bratislava: YOUNG SCIENTIST, ISBN 80-88792-02-9.
26. OLEJÁR, M. – OLEJÁROVÁ, I.: *Integrály*. I. diel. Bratislava: YOUNG SCIENTIST, ISBN 80-88792-03-7.
27. ORSZÁGHOVÁ, D. - PECHOČIAK, T. - TRENČIANSKA, D. – KMEŤ, F.:
Matematika 1. Nitra : Slovenská poľnohospodárska univerzita, 2002. 337 s. ISBN 80-7137-985-9
28. *Pojem určitého integrálu*. Dostupné na internete:
<http://www.math.sk/skripta2/node36.html>
29. *Priebeh funkcie*. Dostupné na internete:
<http://www.evln.stuba.sk/~velichova/PREDNASKY/Prednaska112.xml>

30. *Přednášky z funkcionální analýzy*. Dostupné na: <http://www.kag.upol.cz/travnicek/>
31. *Trigonometrijske funkcije*. Dostupné na internetu:
http://www2.arnes.si/~mpavle1/mp/trigo_f.html

Kapitoly z matematiky

Druhé rozšírené vydanie

Autor: doc. PaedDr. Danka Lukáčová, PhD.

Editor: doc. PaedDr. Danka Lukáčová, PhD.

Vydavateľ: Pedagogická fakulta UKF v Nitre

Rok vydania: 2015

Rozsah: 87 strán, 3,7 AH

Náklad: 50 ks

Tlač: elektronická učebnica

ISBN 978-80-558-0802-4

EAN 9788055808024